논리적 원리들의 타당성에 관하여:

집합을 가정하는 수학 영역에서 논리적 원리들의 타당성에 대한 문제 제기

양 은 석
(연세대 강사)

1. 들어가는 말

고전 논리학에서 논리의 원리들로 간주되는 배중률과 모순율, 배분법칙 따위의 타당성에 대한 문제제기가 다치논리와 퍼지논리, 양자논리, 직관주의논리 등을 통하여 수행되어 왔다. 구체적으로 퍼지논리와 양자논리에서는 개념이 갖는 경계의 불확정성과 (양자역학 내에서 대상의 위치와 운동량을 동시에 측정할 수 없는) 인식의 불확정성을 통해[1] 배중률과 모순율, 배분법칙 등의

---

1) 대수적 의미해석 구조를 갖는다는 공통점에도 불구하고 양자논리와 퍼지논리는 주어진 지점에서 구별된다. 전자는 기본적으로 개연성의 논리인 반면 후자는 가능성의 논리인 것이다. 양자논리와 퍼지논리의 차이점은 전자가 단조성monotonicity 조건에 기초하고 있는 반면 후자는 가법성additivity 조건에 기초하고 있다는 사실에서 잘 나타난다: 이는 개연성이론과 퍼지이론의 차이성을 극명하게 드러내 준다. 개연성이론에서의 대수합은 여연산에 관한 한 항상 1의 값을 갖는다. 예) $P(A) + P(Ac) = 1$ <가법성 조건>. 그러나 퍼지이론에서 <가법성의 조건>은 필연적이지 않다. 퍼지이론은 <단조성 조건> ($x \leq x', y \leq y'$) $\rightarrow S(x, y) \leq S(x', y')$ 에 기초해 있다. 불확실성에 있어서 개연성과 애매성의 간단한 차이구분에 대해서는 Zimmermann(1991), 3쪽 참조. 개연성이론과 퍼지 이론의 기본적인 차이점에 대해서는 같은 책, 8장과 이광형 · 오길록(1991), 8장을 참조할 것.

타당성에 대해 문제가 제기되었다.[2] **그리고 다치논리로서의** 3**치 논리에서는 미래의 우연문장(루카츠비츠)이나 의미론적 역설을 발생시키는 문장(보흐바) 등을 통해 배중률과 모순율의 타당성에 대하여 문제제기가 이루어졌다.**[3] **그러나 수학을 논리학으로 환원하고자 하는 현대 수리논리학의 전개양상에 비추어 볼 때 그러한 논의 대상들은 수학의 영역에 관한 한 본질적인 논의의 대상들이 아닌 것으로 비쳐질 수 있다. 그리고 비록 무한 수학의 대상들에 대한 논의를 유한 수학으로 환원하여 그 대상들의 진리치를 보존하려고 했던 힐버트의 계획이 괴델에 의해 실패로 돌아갈 수밖에 없었던 것은 사실이나, 플라톤이 수학의 대상들을 (개념과 더불어) 불변하는 보편적인 대상으로 간주한 이래로 지적된 논리의 원리들이 그러한 수학적 대상들을 취급하는데 있어서 만큼은 비교적 안정된 지위를 획득해 온 것이 엄연한 현실이다. 배중률과 모순율, 배분법칙 등의 타당성에 대하여 제기된 문제점이 아직 수학의 영역 내에서 이루어진 것이 아니라는 점에서 그리고 무한 수학의 영역에서 직관주의가 문제삼은 배중률이 고전 논리학에서 항진으로 간주되는 배중률이 아니라는 점에서**[4]

---

2) **전자와 관련해서는 졸고**(1997a), 6**장** 1**절을 그리고 후자와 관련해서는** Mittelstaedt(1978), 6**장과 결론**, Hughes(1981), 146-57**쪽을 참조할 것**

3) **이와 관련하여** Turner(1984), 3**장과** Rescher(1968), 6**장을 참조할 것.**

4) **직관주의는 구성 가능한 것(증명 가능한 것)에 한하여 그것의 참을 인정한다 따라서 직관주의에 있어서 문제가 되었던 배중률은 "임의의 명제(P)가 증명 가능하거나 그것의 부정 명제가 증명 가능하다**($\vdash_I P \vee \vdash_I \neg P$)**"에 해당하지 "임의의 명제나 그것의 부정 명제가 증명 가능하다**($\vdash P \vee \neg P$)**"에 해당하지 않는다. 이는 고전적인 직관주의를 대표하는 브라우어와 하이팅이 제시하는 다음의 두 사례에 잘 나타나 있다.**

<**사례**1> [**배중률**]**에 관한 브라우어의 반례**(Brouwer(1923b), 337**쪽** / Brouwer(1981), 6**쪽 참조**)

"모든 수학의 집합은 유한집합이거나 무한집합이다"

[**반례**]

고려해 볼 때 그러한 안정성은 더욱 분명히 지지될 수 있는 것처럼 보인다. 특히 수학에서 취급하는 수가 집합으로 정의될 수 있고 대수학이나 위상학 등이 여전히 그러한 집합을 전제로 하는 체계라는 점에서 볼 때, 여타의 논리에서 제기되는 기존의 논리

· d_V : Vth digit to the right of the decimal point in the decimal expansion of π
· $m=k_n$, d_m for the nth time that the segment $d_m d_{m+1} \cdots d_{m+9}$ of this decimal expansion forms the sequence 0123456789
· $k_N = \{k_n\}$
; k_n**이 존재하는지 아닌지가 유한한 방법으로 결정될 수 없기 때문에 그것들의 집합** k_N**이 유한집합인지 아닌지는 결정 불가능하다.**

<**사례**2> [**배중률**]**에 관한 하이팅의 반례**(Heyting(1956), 24**쪽**)
" ab=0**이면** a=0 **이거나** b=0**이다**"

[**반례**]
* a, b : real number generators defined by the following laws
<1st Case>
$a_n = b_n = 2^{-n}$, if no sequence 012⋯9 occur in the first n decimals of π
<2nd Case>
· the sequence occurs in the first n decimals
· let 9 in the first sequence be the kth digit

$a_n = 2^{-k}$ & $b_n = 2^{-n}$, k : odd
$a_n = 2^{-n}$ & $b_n = 2^{-k}$, k : even

; a, b**에 대하여 각각의** a, b**가** 0**인지 아닌지는 결정될 수 없다. 그러나** ab=0 **이다**:
$(|a_n b_n| < 1/m,\ n>m)$, $a_n b_n = 2^{-2n}$, 1st Case
$a_n b_n = 2^{-k-n}$, 2nd Case

주어진 사례와 반례를 1**차 논리 형식으로 정형화하면 다음과 같다**:
(x: **임의의 집합을 지시하는 개체 변항**, Fx: x**는 유한집합이다**,
¬Fx: x**는 유한집합이 아니다**(**무한집합이다**), k_N: **정의된 집합을 지시하는 개체 상항**)

<**사례**1> "(∀x) Fx∨¬Fx"
[**반례**] $\exists k_N$ s.t $\nvdash_I Fk_N \wedge \nvdash_I \neg Fk_N$ ($\vdash_I$: "**직관주의 명제논리체계** I**에서 증명 가능하다**")
<**사례**2> $\forall x,y,\ xy = 0 \rightarrow x = 0 \vee y = 0$
(a, b : <**사례**2>**의 반례에 대한 정의를 만족하는** a, b)
[**반례**] $\exists a,b$ s.t. $\vdash ab=0$ & $((\nvdash a=0 \wedge \nvdash \neg a=0)$ & $(\nvdash b=0 \wedge \nvdash \neg b=0))$ **이와 관련된 보다 자세한 논의를 위해서는 이종권**(1993), 119-39**쪽을 참조할 것**.

의 원리들의 타당성에 대한 비판이 아직은 수학의 영역으로까지 확장될 수는 없는 것으로 보인다.

그러나 실제로 그렇게 주장할 만한 당위성이 있을까? 이 글의 논의는 주어진 질문에서 시작된다. 즉 전통 논리학을 포함하는 고전 논리학 내에서 타당한 것으로 간주되는 논리의 원리들이 집합을 전제로 하는 수학의 영역에서 취급하는 대상들에 대하여 보편적으로 적용될 수 있는가 하는 것이다. 이에 대한 답변은 부정적이다. 왜냐하면 기존의 논리적 원리들에 대한 반증 사례들을 집합을 전제로 하는 수학 영역에서 발견할 수 있기 때문이다. 그리고 (전통 2치 논리에서나 타당한) 논리적 원리들에 대한 반증 사례를 제시하는 것이 본문에서 수행될 내용이다. 이를 통하여 수학의 영역 특히 집합을 전제하는 수학의 영역 내에서도 전통적인 논리의 원리들이 항상 타당할 수는 없다는 것을 보이는 것이 이 글의 기본적인 목적이다. 그러나 필자는 이로부터 고려해야 할 사안이 있다고 생각한다. 그리고 그것이 철학적으로 더 가치를 지닌다고 생각한다. 그것은 고전 논리학과 그 안에서 마련되는 논리의 원리들의 보편 타당성에 대한 문제제기이다. 즉 아리스토텔레스가 2치 논리학으로서의 삼단논법을 보편학으로 간주(「후서」 I, 14장 참조)한 이래로 전통적으로 수행되어 오던 2치 논리의 원리들은 제반 학문의 영역에서뿐만 아니라 수학의 영역에서도 그 보편 타당성이 마련되지 않는다는 점을 보임으로써 논리에 있어서 어떠한 것을 논리의 원리들로 간주하고 논리를 어떻게 이해해야 할 것인지에 대한 새로운 철학적인 논의가 필요하다는 점을 간접적으로나마 드러내고자 하는 것이다.

2. 초한수의 산술과 대수학 내에서 논리의 원리들과 구조 문제

초한수의 산술과 대수학 내에서 전통 연역논리학[5]의 논리적 원리들의 타당성에 대하여 문제를 제기할 수 있는 것은 기본적으로 고전 논리가 갖는 구조적인 한계성에 기인한다. 즉 흔히 전통 논리학 교과서에서 마련되는 명제논리는 의미론적 측면에서 볼 때 진리표에서 "동어반복"으로 나타나는 명제들을 "恒眞"으로 간주하며 일계 논리는 그것에 양화연산을 첨가하여 명제논리를 확장한 체계이다. 그리고 그 의미론적(구조적) 특성은 명제논리의 진리표가 불 대수 구조를 갖는다는 점과 일계 논리는 그러한 구조를 보존하는 확장된 체계라는 점에서 잘 드러난다.[6] 그러나 초한수의 산술이나 대수학은 그러한 대수적 구조보다는 일반적인 구조를 갖는다. 그리고 그것은 고전 논리의 원리들을 만족하지 않는 반례를 발생시킨다. 따라서 여기서 문제삼고자 하는 것은 사실 논리의 원리들의 타당성이라기보다는 고전 논리학에서 명제의 타당성을 마련하기 위해 제시하는 "동어반복"의 구조가 과연 보편적인가에 대한 문제제기에 해당할 것이다.

칸트나 직관주의자들이 초급 산술의 명제들 예를 들어 "2+3=5" 따위의 명제를 직관적으로 자명한 것으로 간주하고[7] 힐버트가 무한수학의 대상들로서의 허수나 초한수 등의 존재문제

---

5) 필자는 아리스토텔레스의 삼단논법Aristotelian syllogism과 2치의 명제, 술어논리를 편의상 전통 연역논리로 명명한다.

6) 술어논리는 불 대수의 기본 구조를 보존하는 다진 불 대수나 cylindric algebra로부터 의미해석이 이루어진다. 이와 관련하여 Halmos(1956), 363-87쪽, Faust(1982), 27-53쪽과 Myers(1976), 189-202쪽 등을 참조할 것.

7) 이와 관련하여 『프롤레고메나』, 7, 11, 12절, 브라우어(1989), 78-81쪽, 하이팅(1956), 6-13쪽 등을 참조할 것.

를 유한수학의 문제로 환원하여 해결하려고 하는 시도[8]에 있어서 간과한 것은 무한 수학이나 유한 수학 모두 집합으로 정의될 수 있는 수만 가지고 성립하는 체계가 아니라는 점이다. 집합으로서의 수를 가지고 성립하는 기본 산술이나 그것을 연장한 초한수의 산술 그리고 대수학이 성립하기 위해서는 (대수) 합(+)과 곱(·) 등의 기본 연산자를 사용해야 한다. 그리고 그러한 연산자를 사용하는데 있어서 지적된 체계들은 필연적으로 대수적 구조를 갖게 된다. 즉 칸트나 직관주의자들이 직관적으로 자명한 것으로 간주한 기본 산술의 명제는 단지 "직관성"으로 해명될 명제가 아니라 수와 대수연산자로부터 성립하는 체계 안에서 이해되어야 할 명제인 것이다. 이때 수적 대상들과 그것들 사이의 기본 연산 안에서 이루어지는 수학의 체계가 모두 불 대수 구조를 갖는 것은 아니다. 이 절에서 보이고자 하는 내용은 바로 그러한 내용이다.

2.1. 불 대수 구조

2치 논리로서의 명제논리가 그 의미해석에 있어서 불 대수 구조를 갖는다는 것은 이미 알려진 사실이기 때문에 여기서는 간단히 불 대수가 성립하기 위한 기본 공리가 어떤 것인지만을 지적하기로 하겠다.

먼저 대수적 측면에서 볼 때 불 대수는 다음의 다섯 가지를 공리로 하는 대수 체계이다.

[정의1] 불 대수 정의

---

8) 이와 관련하여 힐버트(1904), 129-38쪽, (1925), 367-92쪽 등을 참조할 것.

불 대수는 동등관계(=)를 포함하는 다음의 공리를 만족하는 항 $\langle B, *, \cdot, ', 0, 1\rangle_{=}$ 이다:

(B: 집합, $*, \cdot$: B의 이항연산binary operation 합joint과 곱meet, ': B의 일항연산 여complement, 0, 1: B의 특수원소distinct elements)

공리1. [결합법칙] 각각의 연산은 결합법칙을 만족한다:

$$\forall x,y,z \in B, \quad x*(y*z) = (x*y)*z \quad \& \quad x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$$

공리2. [교환법칙] 각각의 연산은 교환법칙을 만족한다:

$$\forall x,y \in B, \quad x*y = y*x \quad \& \quad x \cdot y = y \cdot x$$

공리3. [배분법칙] 각각의 연산은 배분법칙을 만족한다:

$$\forall x,y,z \in B, \quad x*(y \cdot z) = (x*y) \cdot (y*z) \quad \& \quad x \cdot (y*z) = (x \cdot y)*(y \cdot z)$$

공리4. [항등법칙] 각각의 연산은 항등법칙을 만족한다:

$$\forall x \in B, \quad x*0 = x \quad \& \quad x \cdot 1 = x$$

공리5. [여법칙] 각각의 연산은 여법칙을 만족한다:[9]

$$\forall x \in B, \quad \exists x' \in B \quad \text{s.t. } x*x' = 1 \quad \& \quad x \cdot x' = 0$$

여기서 집합의 대상을 명제로 하고 연산자로 일항, 이항 관계 연산 ¬, ∧, ∨을 그리고 1을 명제에 관한 “참(T)” 값으로 0을 “거짓(F)” 값으로 해석할 경우[10] 명제논리와 그것의 의미해석을 제공하는 진리표를 구성할 수 있다.[11] 그리고 다치논리와 퍼지논리 등에서 문제가 제기되고 있는 우리가 흔히 알고 있는 논리의 원리들은 진리표 또는 불 대수 하에서 항상 참 또는 1의 값을 갖는다. 그러나 그러한 대수적 구조 안에서 타당성이 마련되는 교환법칙과 배분법칙 등이 문장이 아닌 수적 대상들에 보편적으로 적용되는 것은 아니다. 그것을 보이는 것이 2.2절과 2.3절의 내용

---

9) 여기서 여법칙은 전통 연역 논리학의 배중률, 모순율에 해당한다.

10) 동치관계를 포함하는 명제에 관한 불 대수 $\langle P, \vee, \wedge, \neg, F, T\rangle_{\equiv}$(P:명제들의 집합, ∨:선언, ∧:연언, ¬:부정, F:거짓, T:참)

11) 전통적인 집합 또한 불 대수와 동형으로 간주될 수 있다: (불 대수에 관한 동등관계를 포함하는 집합에 관한 불 대수 $\langle 2^s, \cup, \cap, {}^c, \varnothing, U\rangle_{=}$($2^s$:S의 부분집합들의 집합, ∪:합, ∩:곱, ^{c}:여, ∅:공집합, U:전체집합)

이다.

2.2. 초한수의 산술과 교환법칙과 배분법칙의 비성립

괴델의 불완전성 정리를 통해 (동일성을 포함하는) 1계 논리로의 환원이 불가능하다는 것이 증명된 페아노 산술이라는 기본 산술과 관련하여 주목할 것은, 괴델이 그의 불완전성 정리를 통하여 새로운 공리를 첨가한 산술 영역의 확장을 부정한 것은 아니라는 점이다.12) 다만 괴델은 그러한 확장이 갖는 본질적인 한계성을 불완전성 정리를 통해 보여주고 있을 뿐이다. 실제로 1계 논리언어 안에서 페아노 산술이 ZF-집합론으로 그리고 그것이 ZFC-집합론으로 확장될 수 있다는 점을 고려할 때, 불완전성 정리에 따른 한계성과 선택 공리의 수용여부에 대한 문제에도 불구하고 ZFC-집합론은 확장정의에 따른 1계 논리의 확장이론으로 간주될 수 있는 여지를 갖는다.13) 그러나 ZFC-집합론에서 성립

---

12) 괴델은 제 1불완전성 정리에 대한 주를 통하여 제 1 불완전성 정리를 통해 발생하는 결정 불가능한 명제가 좀더 높은 유형(예: P체계에 ω 유형)을 부가함으로써 결정될 수 있으며 이와 유비적인 상황이 집합론의 공리체계에서 허용될 수 있다는 사실을 지적하고 있다.(Shanker(1990), 44쪽 주) 48a)

13) 1계 논리 안에서 다음의 확장정의와 확장보조 정리가 사용된다.(Robbin(1969), 52-54쪽 참조)

[정의2] 확장정의

L(P, X)의 모든 정리를 보존하면서 새로운 정리를 얻을 수 있도록 상항을 첨가하거나 공리들을 변형, 확장하여 얻어지는 형식체계를 L(P, X)의 확장 extension이라고 한다.

[정의3] 1계 체계1st-order system는 임의의 1계 언어에 관한 형식 연역체계 L(P, X)에 의한 확장을 보존하는 체계이다.

[정의4] P를 술어들의 체계, X를 상항들의 집합, T를 L(P, X)의 문장들의 집합이라고 하자.

1. T는 모순inconsistent이다 iff $T \vdash \bot$

; T는 무모순consistent이다 iff T는 모순이 아니다.

2. T는 L(P, X)에서 완전하다 iff L(P, X)의 모든 문장 A에 대하여,

하는 초한수의 산술에 관한 한 이전 체계의 정리들을 보존하는 그러한 확장은 성립하지 않는다. 그것은 유한 수학에서 타당한 교환법칙과 배분법칙이 무한 수학으로서의 초한수의 산술에서 더 이상 타당하지 않다는 점에서 지적될 수 있다. 무한 수학으로서의 초한수의 산술에서 교환법칙과 배분법칙에 대한 다음의 반례가 성립한다.(Kunen(1983), 20-21**쪽 참조**)

<**반례**1> **교환법칙에 대한 서수의 덧셈과 곱셈에서의 반례**

1. **덧셈에 대한 반례**

   $1+\omega \neq \omega+1$[14]

2. **곱셈에 관한 반례**

   $2 \cdot \omega \neq \omega \cdot 2$[15]

<**반례**2> (**왼**) **배분법칙에 대한 반례**

1. $(1+1)\omega \neq (1 \cdot \omega) + (1 \cdot \omega)$[16]
2. $(2 \cdot 2)\omega \neq (2 \cdot \omega) \cdot (2 \cdot \omega)$[17]

따라서 초한수의 산술에 관한 한 교환법칙과 배분법칙은 더

$T \vdash A$이거나 $T \vdash \neg A$이다.($A \in T$이거나 $\neg A \in T$이다)

3. T는 L(P, X)에서 보편적universal이다 iff

   B가 모든 $c \in X$에 대하여 $S^x_c B| \in T$인 L(P, X)의 정합식 일 때,

   $T \vdash \forall xB$이다.($\forall xB \in T$이다)

[보조정리5] 확장 보조정리

T는 L(P, X)의 문장들의 무모순한 집합이다. 이때 X를 확장하는 상수의 집합 Y와 다음을 만족하는 L(P, Y)의 문장들의 집합 T'이 있다:

$T \subseteq T'$이고 (1) T'은 무모순이다

(2) T'은 L(P, Y)에서 완전하다

(3) T'은 L(P, Y)에서 보편적이다.

14) <**증명**> $1+\omega = \cup\{1+n \mid n \in \omega\} = \omega$, $\omega+1 = S\omega$ (S: **후자함수**) ■

15) <**증명**> $2 \cdot \omega = \cup\{2 \cdot n \mid n < \omega\} = \omega$, $\omega \cdot 2 = \omega(1+1) = \omega+\omega$ ■

16) <**증명**> $(1+1)\omega = 2 \cdot \omega = \omega$, $(1 \cdot \omega)+(1 \cdot \omega) = \omega+\omega = \omega(1+1) = \omega \cdot 2$ ■

17) <**증명**> $(2 \cdot 2) \cdot \omega = 4 \cdot \omega = \omega$, $(2 \cdot \omega) \cdot (2 \cdot \omega) = \omega \cdot \omega$ ■

이상 보편적으로 적용될 수 있는 타당한 논리적 원리일 수 없다. 이는 1계 언어이론으로서의 ZFC-집합론이 확장정의에 따른 확장 이론으로의 방식으로 이해될 수 없다는 것을 보여준다. 여기서 만약 집합론과 고전 논리학 사이의 구별을 시도할 경우 논리학과 집합론은 상호 독립적인 영역이 된다. 그렇다고 할 경우 고전 논리학에서 타당한 논리의 원리들을 집합론의 대상들에 적용하는 것은 무의미하게 된다. 따라서 수를 집합으로 간주하는 한에서, 이는 전통적인 논리의 영역 안에서 수적 대상들이 논의될 수 있다고 가정하는 (이 글의 서론에 제시된) 최초의 논제 자체에 위배된다. 동시에 논리학과 집합론이 이종적이라면 그럼에도 불구하고 불 대수가 명제 논리와 더불어 집합들에 대한 공통적인 대수적 구조일 수 있는지에 대한 해명이 수행되어야 하는 문제점을 갖게 된다.

2.3. 대수학 내에서의 불 대수의 대수적 범위 문제

사실 대수학 내에서 불 대수의 보편성을 논의한다는 것은 그 자체로 무의미하다. 왜냐하면 대수적 입장에서 볼 때 불 대수는 대수학 내에서 매우 제한적인 특수한 대수체계에 불과하기 때문이다. 그러나 그것은 수학영역에서 전통적인 논리의 원리들의 타당성을 주장하기에 앞서 간과된 문제점을 일깨워 준다. 그 간과된 문제점은 특수한 대수적 구조하에서야 “동어반복”일 수 있는 논리의 원리들에 왜 보편성을 부여하려고 하는 가이다. 이를 불 대수가 갖는 대수적 범위의 문제를 통해 살펴보는 것이 여기서의 과제이다.

먼저 전통적인 논리의 원리들에 대한 구조를 제공해 주는 불 대수의 대수적 범위를 살펴보자.

불 대수는 대수 체계에 있어서 환Rings이라는 특정 대수영역에 귀속되는 불환Boolean Ring과 동형인 체계이다.[18] 불 환이 성립하는 환은 (합에 관한) 교환법칙을 만족하는 아벨리안 군에 (곱에 관한) 결합법칙과 배분법칙이 부가되어 얻어지는 체계이다. 그리고 이로부터 멱등법칙idempotency이 추가될 경우 다름 아닌 불 환을 얻게 된다. 따라서 명제논리에서 항진으로 간주되는 논리의 원리들인 배중률과 모순율, 교환법칙과 배분법칙 등은 불 환보다 일반적인 대수적 범위 안에서 더 이상 타당한 논리의 원리가 아니다. 그 예로 대수학 내에서 교환법칙과 결합법칙을 만족하지 않는 다음의 사례를 고려할 수 있다.[19]

<반례3> 교환법칙에 대한 반례

1. 정수 위에서 다음으로 정의된 $a*b$: $a*b = a-b$

예) $3-1 \neq 1-3$

2. 양의 정수 위에서 다음으로 정의된 $a*b$: $a*b = a^b$

예) $2^3 \neq 3^2$

<반례4> 결합법칙에 대한 반례

1. 정수 위에서 다음으로 정의된 $a*b$: $a*b = a-b$

예) $(3-1)-2 \neq 3-(1-2)$

2. 양의 정수 위에서 다음으로 정의된 $a*b$: $a*b = a^b$

예) $(2^3)^2 \neq 2^{(3^2)}$

따라서 대수학에 관한 한 교환법칙과 결합법칙은 더 이상 보

18) 시몽G. F. Simmons(1963), 부록3, S. Koppelberg(1989), 1.1.6 참조.

19) 물론 이때 사용되는 연산은 논리합(∨)이나 논리곱(∧)이 아니다. 여기서 문제삼는 것은 바로 그러한 연산이 갖는 (대수적) 구조의 한계이다.

편적으로 적용될 수 있는 논리적 원리일 수 없다.[20] **그리고 그것은 여타의 논리적 원리들인 배분법칙과 배중률, 모순율에도 동일하게 적용된다.**[21] **이로부터 고전 논리학과 대수학의 구별을 시도할 경우 고전 논리가 갖는 구조를 해석하는데서 정립될 수 있는 의미론을 논의하는 것은 본질적으로 무의미하다. 그렇다고 할 경우 문장들의 연결에 사용되는 연산자로서의 논리상항의 쓰임의 당위성에 대한 문제가 야기될 수 있다.**[22]

3. 위상학 내에서 논리적 원리들과 여닫힌 집합[23] 문제

2.2.**절과** 2.3**절에서 고전 논리학의 논리적 원리들의 타당성에 대하여 제기된 문제점은 기본적으로 고전 논리학이 갖는 구조적 한계성으로부터 제기될 수 있는 문제점이었다.**[24] **여기서 제기하려고 하는 문제는 기본적인 연산에 있어서는 문제점을 야기하지 않는 모순적인 개념의 문제이다. 구체적으로 여기서는 위상학에서 사용되는 여닫힌 집합을 통해 모순율의 전통적인 해석방식에**

---

20) 항등원, 역원과 더불어 결합법칙을 공리로 하는 것은 군이며 군론에서 교환법칙을 공리로 갖는 것은 아벨리안 군이다.

21) 항등원, 역원, 결합법칙과 더불어 배분법칙을 공리로 하는 것은 환이며 여법칙(배중률, 모순율)을 공리로 하는 불 대수에 대해서는 2.1절의 [정의1]을 참조할 것. (명제계산을 위한 불 대수에 사용되는 논리합이나 논리곱은 대수합이나 대수곱과는 달리 그 자체로는 군이나 환에 귀속될 수 없는 연산자이다. 이에 관해서는 다른 지면을 통해 좀더 논의될 것이다.)

22) 이는 논리의 구조에 대한 새로운 논의가 필요하다는 사실을 보여준다. 이 또한 다른 지면에서 좀더 논의될 것이다.

23) 필자는 closed & open set(clopen set)을 열린 동시에 닫힌 집합이란 의미에서 "여닫힌 집합"으로 번역하였다.

24) 주어진 반례들은 불 대수보다 일반적인 대수적 범위에 속하는 문장들로 간주될 수 있다.

대하여 문제를 제기하려고 한다. (그리고 그러한 문제점은 배중률로까지 연장될 수 있을 것으로 보인다.)

(1계 논리에서 술어로 사용되는) 개념을 전통적인 방식을 좇아 대상에 대한 속성(일항 관계)으로 간주할 경우, 모순율과 배중률은 다음으로 해석될 수 있다.

속성 P와 그것의 부정 속성 ¬P를 동시에 갖는 대상 x는 존재하지 않는다: 모순율 (1)

임의의 대상 x는 속성 P를 갖거나 그것의 부정 속성 ¬P를 갖는다: 배중률 (2)

그리고 그것을 일계 논리언어와 집합으로 표현하면 다음과 같다.

$$\neg(\exists x)\ (Px \wedge \neg Px) \qquad (1')$$

$$(\forall x)\ (Px \vee \neg Px) \qquad (2')$$

$$P \cap P^c = \{x \mid x \in P \ \&\ x \in P^c\} = \varnothing \qquad (1'')$$

$$P \cup P^c = \{x \mid x \in P \text{ or } x \in P^c\} = U \qquad (2'')$$

주어진 논리의 원리를 만족하는 간단한 사례로서 다음을 들 수 있다.

<사례1>
소크라테스가 사람이면서 동시에 사람이 아닐 수는 없다.
소크라테스는 사람이거나 사람이 아니다.

<사례2>
1이 홀수이면서 동시에 홀수가 아닐 수는 없다.
1은 홀수이거나 홀수가 아니다.

여기서 개체 상항에 해당하는 "소크라테스"와 "1" 따위의 외연을 (개체 변항을 통해) 한정해 줄 수 있는 것은 다름 아닌 술어

(상항) “사람”과 “홀수”이다. 그리고 그러한 특성은 다음의 가정을 성립시킨다.

<가정1> 특정 속성을 의미하는 개념은 그러한 속성을 만족하는 대상들의 범위를 (외연에 있어서) 한정한다.[25)]

그러나 위상학에선 (1)을 만족하지 않는 개념이 존재한다. 그것이 바로 “열린 집합open set”과 “닫힌 집합closed set”이라는 개념이다. 우선 “열린 집합”과 “닫힌 집합”은 위상학에서 다음으로 정의될 수 있다.[26)]

[정의6] 열린 집합 (Patty(1993), 6쪽)

A subset U of a metric space (X,d) is open if for each $x \in U$, there is an open ball $B_d(x, \varepsilon)$ such that $B_d(x, \varepsilon) \subseteq U$.

[정의7] 위상학 (같은 책, 10쪽)

A topology on a set X is a collection $\mathbf{T}$ of subsets of X having the following properties:

(a) $\emptyset \in \mathbf{T}$ and $X \in \mathbf{T}$

(b) If $U \in \mathbf{T}$ and $V \in \mathbf{T}$, then $U \cap V \in \mathbf{T}$

(c) If $U_\alpha \in \mathbf{T}$ for each α in an index set Λ, then $\cup \{U_\alpha \mid \alpha \in \Lambda\} \in \mathbf{T}$

The members of $\mathbf{T}$ are called open sets.

[정의8] 위상공간 (같은 곳)

---

25) 이는 개념을 대상의 속성으로 간주하는 전통적인 논리의 이해 방식이다. 이와 관련하여 아리스토텔레스와 프레게에서의 (지각) 대상과 개념 사이의 관계를 고려할 것.(졸고(1997a), 3장 참조)

26) 여기서는 위상학에서 사용되는 표현의 의미를 그대로 살리기 위해 각각의 정의를 영어로 표기한다.

A topological space is an ordered pair (X,**T**), where X is a set and **T** is a topology on X.

[정의9] 닫힌 집합 (같은 책, 26쪽)

A subset A of a topological space (X,**T**) is closed provided its complement, X-A, is open.

주어진 정의 하에서 위상공간 (X,T)에서의 집합 X와 Ø는 여 닫힌 집합이 된다.[27] **그리고 "열린 집합"과 "닫힌 집합"이라는 개념을 문제삼지 않을 경우, X와 Ø는 모순율에 관한 기본 연산에서 문제를 야기하지 않는다.**[28] **즉 집합 X에 속하는 임의의 원소 x는 X에 속하면서 동시에 그것의 여집합 Ø에 속하지 않게 된다. 그러나 전통적인 논리 방식을 좇아 <가정1>을 받아들일 경우, "열린 집합"과 "닫힌 집합"이라는 개념은 X와 Ø에 관한 한 (1)을 만족하지 않는다: P를 열린 집합으로 간주할 경우, Pc은 닫힌 집합이 된다. 이때 X와 Ø는 열린 집합과 닫힌 집합이라는 성질을 모두 갖기 때문에 더 이상 (1)은 성립하지 않는다.▲ 즉 그것은 모순율에 관한 다음의 반례를 성립시킨다.**

<반례5> 모순율에 관한 위상학에서의 반례

(위상공간 (X,T)에서의) 집합 X와 Ø는 열린 동시에 열리지 않은(닫힌) 집합이다.[29]

---

27) 1 X, Ø: open sets ([정의6], [정의7])
 2. Ø: closed (∵ X: open set(1) & X-Ø=X([정의9]))
 3. X: closed (∵ Ø: open set(1) & X-X=Ø([정의9]))

28) (1'')과 (2'')에 있어서 P를 X로 Pc을 Ø로 간주할 경우,
 $\forall x \in X$, $\{x \mid x \in X \ \& \ x \in Ø\} = \emptyset$와 $\{x \mid x \in X \text{ or } x \in Ø\} = X$가 성립한다

29) 이를 1계 논리와 집합에 적용하면 다음의 경우에 해당한다:
 $(\exists x)\ (Px \land \neg Px)$ / $\{x \mid x \in P \ \& \ x \in P^c\} \neq \emptyset$

그리고 배중률을 전통적인 방식을 좇아 모순 명제 사이의 배타적 관계, 임의의 명제와 그것의 부정 명제 사이의 배타적 선언 관계로 해석할 경우[30] X**와 Ø는 배중률 또한 만족하지 않게 된다. 즉 그것은 다음의 배중률*에 대한 반례를 성립시킨다.**[31]

[배중률*] 임의의 명제가 참이다 iff 그것의 부정 명제는 거짓이다. 그리고 그 역 또한 마찬가지이다: (v:진리함수) v(P)=T iff v(¬P)=F

v(P)=F iff v(¬P)=T (2*)

<반례6> 배중률*(2*)에 관한 위상학에서의 반례

(위상공간 (X,T)에서의 집합 X(Ø)에 있어서) "집합 X(Ø)는 열린 집합이다"는 문장은 참이고 동시에 그것의 부정 문장 "집합 X(Ø)는 닫힌 집합이다" 또한 참이다.

여기서 <가정1>에 따라 열린 집합과 닫힌 집합을 대상들의 속성으로 간주할 경우, 모순율((1))과 배중률*((2*))를 만족하지 않는 경우가 발생한다는 단순한 사실을 넘어서 좀더 재고되어야 할 두 가지 사안이 있다. 첫째는 X와 Ø가 열린 집합과 닫힌 집합으로 간주되는 것이 대수적인 연산과 독립적으로 마련될 수

---

30) 이는 명제논리의 배중률에 관한 다음의 의미해석(진리표)에서 잘 드러난다:

P	∨	¬P
1	1	0
0	1	1

이와 관련하여 아리스토텔레스와 프레게의 배중률에 관한 해석을 참조할 것.(후서」 72a10-15, Frege(1970), 131쪽, 135쪽, Frege(1979), 185쪽 참조)

31) 이는 배중률을 레셔가 제시하는 배중률의 경우 중 (iv)의 경우로 해석하는 것이다.(Rescher(1968), 112쪽)

있는 성질의 것이 아니라는 점이다. 즉 X가 열린 집합일 경우 그 것의 여 Ø(Xc)는 닫힌 집합이며 그 역 또한 마찬가지이다.[32] 이는 열린 집합과 닫힌 집합이라는 개념이 연산 관계와 독립적으로 즉 (모순을 배제하는 개념에 준거한) 속성에 의한 방식으로 이해될 수 없다는 것을 반영한다. 그리고 그것은 단순히 개체-속성의 관계구도에 따라 개체의 성질과 관계를 해석하려고 하는 논리적 이해 방식의 정당성에 대한 의문을 야기한다. 둘째는 여닫힌 집합들에 대한 위상공간이 불 대수와 동형이라는 점이다.[33] 즉 전통 연역 논리학에서 수용할 수 없는 모순적인 개념 "여닫힌"을 만족하는 집합들의 공간이 바로 고전 논리학의 지반을 이루는 불 대수 구조인 것이다. 이는 동일한 구조 안에서 고전 논리학에서는 수용할 수 없는 개념들이 실제에 있어서는 그 대상으로 수용될 수 있다는 점을 보여준다. 그것은 첫 번째 제기한 사안과 더불어 개념/관계를 지반으로 하는 논리적 근거지움이 얼마나 정당한 것인지를 재고하게 한다.

4. 논리의 원리들과 수리 철학적 문제

지금까지 전통 연역 논리학에의 논리적 원리들이 집합을 전제하는 수학의 영역에서도 타당하지 않다는 점을 반례를 통하여 예증하였다. 이는 전통적인 논리의 원리들 특히 배중률, 모순율, 배분법칙, 교환법칙, 결합법칙 등이 서론 부분에서 지적한 제반

---

32) 주 25) 참조.

33) 여기서의 위상 공간은 totally disconnected compact Hausdorff space에 해당한다. 불 대수와 관련된 보다 자세한 논의를 위해서는 Simmons(1963), 부록 3, S. Koppelberg(1989), 7절을 참조할 것.

영역에서뿐만 아니라 (집합을 전제로 하는) 수학의 영역에서조차도 결코 보편적으로 적용될 수 없다는 사실을 반영해 준다. 이를 수용한다면 아리스토텔레스 이래로 줄곧 전제해 오던 논리의 보편성은 전통 연역 논리학 안에서는 더 이상 마련될 수 없는 것으로 보인다. 그리고 그러한 문제점은 논리에 대한 새로운 검토가 이루어져야 하는 당위성을 산출하는 것으로 보인다.

논리에 대한 새로운 검토가 요구된다는 사안에 대한 당위성은 무엇보다도 현대 수리철학의 전개 양상 안에서 발견될 수 있다. 박우석 교수가 지적하듯이 최근의 수리 철학적 논의는 초기의 수리 논리학을 통해 수행되던 토대론적 논의가 아닌 실제의 실천에 그 초점이 맞춰져 있는 것으로 보인다.[34)] 그러한 사실은 전통적인 논리학자들이 보여주던 논리에 관한 플라톤적인 입장을 집합론 안에서 계승하고 있는 매디조차도 자신의 "집합론적 실재론set theoretic realism"을 "논리주의"와 철저히 구별하고 있다는 점에서 실제로 확인될 수 있다.(Maddy(1990), 26-27쪽)[35)] 필자의 견지에서 볼 때 여타의 수학이 집합론으로 그리고 집합론이 논리학으로 환원될 수 있는가 하는 토대론적 논의가 문제조차 되지 않는다는 사실(같은 책, 6쪽)은 논리학이 더 이상 수리 철학적으로 논의될 필요가 없다는 것을 예증한다기보다는 오히려 전통 논리학 안에서 안주하려고 했던 기존의 논리학자들의 태도에

---

34) 이와 관련하여 박우석(1994), 327-340쪽 참조. 필자는 박우석 교수의 기본적인 입장에 동의한다. 그러나 그것은 프레게 안에서 재검토되어야 할 문제라기보다는 현재 재기되고 있는 수리 철학적 문제들 안에서 자성되고 새로이 정립되어야 할 문제라고 생각한다.

35) 여기서 주의할 것은 매디의 플라톤주의가 전통적인 플라톤주의로부터 구별될 수 있다는 점이다. 매디의 플라톤주의는 콰인의 "자연화된 인식론"에 상당히 근접해 있다. 이와 관련하여 Maddy(1990), 5장 참조.

대한 각성을 요구하는 것으로 보인다. 왜냐하면 이 글에서 논의된 전통 연역 논리학의 논리적 원리들을 만족하지 않는 수학의 영역(초한수의 산술, 대수학, 위상학)은 집합들을 그 기본 대상으로 하고 그것들 사이의 구조를 갖고 이루어지는 학문 영역이기 때문이다. 대상과 구조를 배제할 수 없는 그러한 특성은 이 글에서 논의되지 못한 퍼지논리나 양자논리 등에도 마찬가지로 적용될 수 있다.[36] **그러한 점에서 볼 때 기존의 논리의 원리들을 더 이상 수용할 수 없는 수학과 논리의 영역이 어디인지를 확인하고 그 안에서 논리를 재구성하는 작업이 필요하다고 생각한다. 이는 위상학에서 나타나듯이 임의의 속성부여가 그 구조와 독립적으로 주어질 수 없다는 점에서**[37] **그리고 이 글에서는 충분히 논의되지 못하였지만 배분법칙이나 교환법칙의 타당성에 대한 논의가 배중률, 모순율의 타당성 논의와는 대수적 범위에 있어서 구분되어야 한다는 점에서**[38] **더욱 분명한 것으로 보인다. 그리고 이 글의 그러한 작업을 위한 예비작업이 될 것이다.**

---

36) 이와 관련하여 필자의 박사학위논문 6장 2절의 격자구조에 관한 논의를 참조. 필자는 대상과 그것들 사이에서 성립하는 구조 안에서 논리가 재론될 가능성이 있다고 생각한다. 그러한 점에서 볼 때 집합론적 실재론자들이나 구조주의자들은 양쪽의 어느 한 면에 치우쳐서 그러한 가능성을 간과하고 있는 것으로 보인다.

37) 3절에서의 여닫힌 집합에 대한 논의를 참조할 것.

38) 이와 관련하여 2.3절을 참조할 것.

참고문헌

김상문, 「Set Theory」. (**교재**)

박우석(1994), **「現代 數理哲學의 百家爭鳴」**. **『과학과 철학』**. **제**5**집**. **과학사상 연구회**. **서울**: **통나무**. 327-340**쪽**.

양은석(1997a), "**논리적 개념의 불확정성에 관한 연구**". **연세대학교 대학원 철학과 박사학위논문**.

이광형 · 오길록(1991), **『퍼지이론 및 응용** 1**권**: **이론』**. **서울**: **홍릉과학 출판사**.

이종권(1993), "**배중률에 대한 직관주의의 반론**". **『과학과 철학』**. **제** 1**집**. 5**쇄**. **과학사상 연구회 서울**: **통나무**. 119-139**쪽**.

Aristotle(1938), *Categories on Interpretation & Prior Analytics*, vol. 1, trans. by Cooke. H. P. & Tredenick. H. The Loeb Classical Library. no. 325. Cambridge: Harvard Univ. Press.

________(1966), *Posterior Analytics & Topics*, The Loeb Classical Library, XVI,. Cambridge: Harvard Univ. Press.

________(1960), *Posterior Analytics & Topics*, trans. by Tredenick. H. & Forster. E, S. The Loeb Classical Library, no. 391.

Brouwer, L. E. J.(1989), "Intuitionism and formalism", *Philosophy of Mathematics*, 2nd ed., ed. by Benacerraf. P. & Putnam. H., Cambridge: Cambridge Univ. Press, 77-89**쪽**.

________________(1981), *Brouwer's Cambridge Lectures on Intuitionism*, ed. by D. van Dalen, Cambridge: Cambridge Univ. Press.

________________(1923), "On the significance of the principle of excluded middle in Mathematics, especially in function theory, Addenda and Corrigenda, and further addenda and corrigenda(1923b, 1954, 1954a)", From *Frege to Gödel*, ed. by van Heijenoort, Cambridge: Harvard Univ. Press, 1977.

Devlin, K. J.(1984), *Constructability*, Berlin: Spring Verlag.

Faust, D. H.(1982), "The Boolean Algebra of formulas of first-order Logic", *Annals of Mathematical Logic* 23, North-Holland Publishing Co.. 27-53쪽.

Fraleigh, J. B.(1994), *A First Course in Abstract Algebra*, Messachusetts: Addison-Wesley Publishing Co..

Frege, G.(1979), *Posthumous Writings*, trans. by Long. P. & White. R., Chicago: Chicago Univ. Press.

________(1970), *Translations from the Philosophical Writings of Gottlob Frege*, ed. by Geach. G. & Max Black, Oxford: Basil Blackwell.

Gödel, K.(1990), "On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and related Systems I(1931)", *Gödel's Theorem in focus*, ed. by Shanker. S. G, London: Routledge, II. 17-47쪽.

Halmos, P. R.(1956), "The Basic Concepts of Algebraic Logic", The American Mathematical Monthly 63, 363-387쪽.

Heyting, A.(1956), *Intuitionism: An Introduction*. Amsterdam: North-Holland Publishing Company.

Hilbert, D.(1904), "On the foundations of logic and arithmetic(1904)", *From Frege to Gödel*, ed. by van Heijenoort. J., Cambridge: Harvard Univ. Press, 1977, 129-138쪽.

_________(1925), "*On the infinite(1925)*", *From Frege to Gödel*. 367-392쪽.

Hughes, R. I. G.(1981), "*Quantum Logic*", *SCIENTIFIC AMERICAN*, 245. 146-157쪽.

Kahn, D. W.(1975), *Topology*, Baltimore: The Williams & Wilkins Company.

Kant, I.(1920), *Prolegomena*, Leipzig: Verlag von Felix Meiner.

Koppelberg, S.(1989) *Handbook of Boolean Algebra*, vol. 1, ed. by J.

D. Monk, with R. Bonnet, New York: Elsevier Science Publishers B. V..

Kunen, K.(1983), *Set Theory*, New York: Elsevier Science Publishers B. V..

Maddy, P.(1990), *Realism in Mathematics*, Oxford: Clarendon Press.

McLane, S. & Birkhoff, G.(1967), *Algebra*, New York: The Macmillan Co..

Mittelstaedt, P.(1978), *Quantum Logic*, Dordrecht: D. Reidel Publishing Co..

Myers, D.(1976), "*Cylindric algebras of first order languages*", *Transactions of the American Mathematical Society* 216, 189-202쪽.

Patty, C. W.(1993), *Foundations of Topology*, Boston: PWS-KENT Publishing Co..

Rescher, N.(1968), *Topics in Philosophical Logic*, Dordrecht: D. Reidel Publishing Co..

Robbin, J. W.(1969), *Mathematical Logic*, New York: W. A. Benjamin Inc.

Simmons, G. F.(1963), *Introduction to Topology and Modern Analysis*, Auckland: McGraw-Hill Kogakusha Ltd.

Stoll, R. R.(1963), *Set Theory and Logic*, Sanfransisco: W. H. Freeman & Co..

Turner, R.(1984), *Logics For Artificial Intelligence*, Chichester: Ellis Horwood Limited.

Zimmermann, H. J.(1991), *Fuzzy Set Theory*, 2nd. ed., Boston: Kluwer Academic Publishers.