논리연구 15-1(2012) pp. 155~189

비트겐슈타인과 힐베르트 프로그램* ** ***

박 정 일

【요약문】 힐베르트의 프로그램에 관한 한, 비트겐슈타인의 생각의 발전 과정에는 뭔가 중요한 차이가 있는 것처럼 보인다. 1929년 비트겐슈타인이 철학에 복귀하는 과정에서 빈 학파의 슐리크와 바이즈만을 만나 함께 토론한 내용을 정리한 『비트겐슈타인과 빈 학파』, 또 그 과정에서 비트겐슈타인이 자신의 생각을 정리하여 쓴 『철학적 고찰』과 『철학적 문법』에서의 비트겐슈타인의 주요 주장은 1939년에 행한 『수학의 기초에 관한 강의』, 또 이 강의를 전후해서 비트겐슈타인이 쓴 『수학의 기초에 관한 고찰』에서의 비트겐슈타인의 생각과 중요한 차이를 보이고 있기 때문이다. 나는 그 차이가 무엇인지를 보이기 위해서 먼저 힐베르트의 프로그램과 형식주의를 간략하게 살펴보고자 한다. 다음으로 나는 비트겐슈타인이 힐베르트의 형식주의로부터 어떤 영향을 받았으며, 또 그것을 어떻게 비판했는지를 조명할 것이다. 또한 나는 힐베르트의 프로그램에 대해서 중기 비트겐슈타인이 어떻게 비판했는지를 조명하고자 한다. 우리는 중기 비트겐슈타인이 힐베르트 프로그램에 대해서 칸토어의 집합론에 대해 했던 전기 비트겐슈타인의 주장만큼이나 과격한 주장을 했다는 것을 확인하게 될 것이다. 그러나 후기 비트겐슈타인은 더 이상 그러한 과격한 주장을 하지 않는데, 나는 중기 비트겐슈타인의 주장을 직접 비판함으로써, 또 비트겐슈타인 자신이 스스로 어떤 비판을 했을지를 논의하면서, 후기 비트겐슈타인이 왜 더 이상 그러한 주장을 하지 않는지 그 이유를 조명하고자 한다.

【주요어】 비트겐슈타인, 힐베르트, 힐베르트의 프로그램, 형식주의, 메타수학, 무모순성 증명

* 접수일자: 2011.12.31. 심사 및 수정 완료일: 2012.01.25. 게재확정일: 2012.02.09.
** 본 연구는 숙명여자대학교 2010학년도 교내연구비 지원에 의해 수행되었음.
*** 본 논문의 초고를 읽고 날카롭게 비판을 해 준 세 분의 심사위원께 깊이 감사드린다.

1. 들어가는 말

20세기 수학사에서 힐베르트만큼 큰 족적을 남긴 수학자도 없을 것이다. 1900년 세계 수학자 대회에서 23개의 수학적 난제를 정리하여 발표한 것을 시작으로 그는 소위 '수학의 위기'를 정면으로 돌파하기 위하여 '힐베르트 프로그램'을 제안하였고, 이 과정에서 등장한 개념들과 착상들은 이후, 괴델의 완전성 정리와 불완전성 정리, 튜링과 처치의 결정문제 해결 불가능성 정리와 보편 튜링기계, 그리고 겐첸의 산술의 무모순성 증명을 가능하게 하였다. 이러한 눈부신 수리논리학의 발전 과정에서 디지털 정보 혁명과 현대 컴퓨터 발명의 맹아가 출현하였다는 것은 잘 알려진 사실이다.

그런데 힐베르트는 수학뿐만 아니라 수학철학에서도 큰 업적을 남겼다. 잘 알려져 있듯이 수학철학자로서 그는 형식주의를 주장하였다. 즉 수학을 무의미한 기호들의 조작이나 놀이로 파악할 수 있다는 새로운 수학철학을 펼친 것이다. 이러한 새로운 수학철학은 당시 브라우어의 직관주의와 날카롭게 대립하며 한 시대를 풍미하는 수학철학적 논쟁을 야기하였고, 프레게와 러셀의 논리주의라는 수학철학의 사상을 능가하는 새로운 지평을 열었다.

한편 비트겐슈타인은 젊은 시절에 출판한 『논리철학논고』에서 여전히 프레게와 러셀의 영향 하에 있었다. 그는 프레게와 러셀의 의미 이론에서 완전히 벗어나지 못했고, 수학과 논리학의 지위에 대해서도 그들과는 다르지만 여전히 유사한 주장을 했던 것이다. 그러나 그는 1929년 철학에 다시 복귀하는 과정에서 『논리철학논고』에 치명적인 난점이 있다는 것을 서서히 깨닫게 된다. 우리는 그 점을 "색깔배제 문제", 유아론의 문제, 『논리철학논고』의 불안정한 수학철학 등으로 요약할 수 있다.

그렇다면 힐베르트의 프로그램과 형식주의는 이러한 비트겐슈타

인에게 어떤 영향을 주었을까? 더 나아가 비트겐슈타인은 힐베르트 프로그램과 형식주의에 대해 어떤 점을 수용하였고 어떤 점을 비판하였는가? 비트겐슈타인의 성숙한 독창적인 수학철학은 힐베르트의 철학과 어떤 관련이 있는가?

나는 이 글에서 바로 이 문제들을 다루고자 한다. 그런데 힐베르트의 프로그램에 관한 한, 비트겐슈타인의 생각의 발전 과정에는 뭔가 중요한 차이가 있는 것처럼 보인다. 1929년 비트겐슈타인이 철학에 복귀하는 과정에서 빈 학파의 슐리크와 바이즈만을 만나 함께 토론한 내용을 정리한 『비트겐슈타인과 빈 학파』, 또 그 과정에서 비트겐슈타인이 자신의 생각을 정리하여 쓴 『철학적 고찰』과 『철학적 문법』에서의 비트겐슈타인의 주요 주장은 1939년에 행한 『수학의 기초에 관한 강의』, 또 이 강의를 전후해서 비트겐슈타인이 쓴 『수학의 기초에 관한 고찰』에서의 비트겐슈타인의 생각과 중요한 차이를 보이고 있기 때문이다. 요컨대 힐베르트 프로그램에 관한 한, 중기 비트겐슈타인의 주장과 후기 비트겐슈타인의 주장은 다르다.

그렇다면 그 차이란 무엇인가? 이를 보이기 위해서 나는 먼저 힐베르트의 프로그램과 형식주의를 간략하게 살펴보고자 한다(2절). 다음으로 나는 비트겐슈타인이 힐베르트의 형식주의로부터 어떤 영향을 받았으며, 또 그것을 어떻게 비판했는지를 조명할 것이다(3절). 또한 나는 힐베르트의 프로그램에 대해서 중기 비트겐슈타인이 어떻게 비판했는지를 조명하고자 한다. 우리는 중기 비트겐슈타인이 힐베르트 프로그램에 대해서 칸토어의 집합론에 대해 했던 전기 비트겐슈타인의 주장만큼이나 과격한 주장을 했다는 것을 확인하게 될 것이다(4-5절). 그러나 후기 비트겐슈타인은 더 이상 그러한 과격한 주장을 하지 않는데, 나는 중기 비트겐슈타인의 주장을 직접 비판함으로써, 또 비트겐슈타인 자신이 스스로 어떤 비판

을 했을지를 논의하면서, 후기 비트겐슈타인이 왜 더 이상 그러한 주장을 하지 않는지 그 이유를 조명하고자 한다(6절).

2. 힐베르트의 프로그램과 형식주의[1)]

19세기 말 칸토어의 집합론이 출현하면서 칸토어가 제안한 초한수(transfinite number)는 극심한 논쟁을 불러일으켰다. 이는 실제 무한(actual infinity)과 잠재 무한(potential infinity)이라는 해묵은 문제를 둘러싼 시각이 첨예하게 대립하는 양상을 보였으며, 힐베르트는 “어느 누구도 우리를 위하여 칸토어가 창조한 낙원으로부터 우리를 내쫓지 못할 것이다”((1925), p. 376.)라고 선언하면서 적극적으로 칸토어의 집합론을 옹호하고자 하였다. 그러나 칸토어의 역설, 부랄리-포티의 역설, 러셀의 역설이 발견되면서, 전체 수학의 ‘기초’로서 주목받아온 집합론의 기초가 흔들리자 이러한 위기는 소위 ‘수학의 위기’로 확산되었다. 이 과정에서 ‘수학의 위기’를 정면으로 돌파하고자 등장한 것이 힐베르트의 프로그램이다. 그는 자신의 증명이론의 근본적인 생각을 다음과 같이 밝히고 있다.

> 나의 증명이론의 근본적인 생각은 다음과 같다:
> 지금까지의 의미에서 수학을 구성하는 모든 것은 엄밀하게 형식화되며, 그리하여 본래의 수학 또는 더 좁은 의미의 수학은 논리식들의 명세서(Bestande)가 된다. 이 논리식들은 일상적인 기호들 외에도 논리적 기호들, 특히 “따라나오다” 대신에 (→)가, “아니다” 대신에 (~)가 그 안에 나온다는 점에 의해서 그저 수학의 일상적인 논리식들과 구분된다. 수학의 형식적인 구조의 토대로서 이용되는 어떤 논리식들은 공리들이라고 불린다. 하나의 증명은 그 자체로 우리에게 직관적으로 주어지는 하나의 형태(Figur)이다; 그것은 추론들로 이루어지는데, 각각의 전제는 공리이거나 아니면 미리 증명에서 나타나거나 대입을 통해서 그러한 마지막

1) 이 절의 내용은 내용 전개상 박정일(1999, 2000)과 다소 중복됨을 밝혀둔다.

> 논리식이나 공리로부터 생겨나는 추론의 마지막 논리식과 일치한다. 내용적 추론 대신에 증명이론에서는 규칙에 따른 외적인 처리가, 다시 말해 추론도식과 대입의 사용이 나온다. 하나의 논리식이 증명가능하다는 것은 그것이 공리이거나 아니면 한 증명의 마지막 논리식일 때를 뜻한다.
> 본래의 그렇게 형식화된 수학에 어느 정도 새로운 수학, 메타수학이 덧붙여지는데, 이것은 전자를 보증(Sicherung)하기 위하여 필요하며, 그 안에서는—본래의 수학의 순수한 형식적 추론방법에 대조해서—내용적인 추론이 사용되지만 이는 단지 공리들의 무모순성의 증명을 위한 것이다.((1931a), p. 192.)

힐베르트는 "수학의 기초를 확고히 하기 위해서"((1925), pp. 383-384.) 실제 수학 또는 본래의 수학(eigentliche Mathematik)을 형식화하여 그 형식체계의 무모순성을 증명하려고 한다. 그에 따르면, '증명이론', 또는 '메타수학'은 실제 수학에서 이루어지는 "증명 그 자체를 우리의 탐구의 대상으로 삼는"((1922), p. 169.) 이론으로서, 그러한 형식체계에 대한 사유이다. 힐베르트에 따르면, 메타수학은 "형식화된 증명들에 대한 내용적 이론"((1925), p. 385.)이며, 메타수학에서 형식체계의 무모순성 증명이 수행된다.

또한 이 인용문에는 명시적으로 제시되지 않았지만, 그가 "유한주의자 관점"을 강조했음은 잘 알려진 사실이다. 그는 실제 수학을 형식화한 결과, 즉 형식체계에 대해서 '유한주의적 방법'으로('유한적 방법'으로, '유한주의자 관점'에서) 그 무모순성 증명이 수행되어야 한다고 역설한다. 그리하여 힐베르트 프로그램을 정리하면 다음과 같다: 우리는 실제로 수행되는 수학(의 전체나 부분)을 형식화하여 그 형식체계가 무모순이라는 것을 메타수학에서 유한주의적 방법으로 증명할 수 있다. 특히 이렇게 함으로써 우리는 산술의 무모순성을(더 나아가 실제 수학의 무모순성을) 증명할 수 있으며, 칸토어 집합론의 초한 개념을 정당화할 수 있다.

또한 힐베르트는 자신의 '기본적인 철학적 입장'을 다음과 같이

밝히고 있다.

> 칸트는 이미—그리고 이 점은 그의 교설의 본질적인 부분이었는데—수학이 모든 논리학과 독립적으로 확보된 내용을 지니고 있으며 따라서 논리학만으로는 결코 어떤 하나의 기초가 제공될 수 없다고 가르쳤다. 바로 이것이 프레게와 데데킨트의 노력이 실패할 수밖에 없었던 이유이다. 오히려, 논리적 추론에 대한 사용과 논리적 연산들을 수행하기 위한 조건으로서, 어떤 것이 이미 우리의 표상능력에 주어져야만 한다. 즉 직접적인 경험으로서 우리의 모든 사유에 선행하여 직관적으로 현전하는 어떤 논리 외적인 구체적 대상들이 주어져야 한다. 만일 논리적 추론이 신뢰가능하려면, 이들 대상들을 완전하게 하나하나 조망하는 것이 가능해야 하며, 그것들이 나타나고, 그것들이 서로 다르고, 또는 연계되어 있다는 사실은 그 대상들과 더불어, 어떤 다른 것에도 환원될 수 없고 환원이 요구되지 않는 것으로 직관적으로 직접 주어져 있다. 바로 이것이 내가 수학에 대해서, 그리고 일반적으로 모든 과학적 사유와 이해, 그리고 의사소통에 필수불가결하다고 간주하는 기본적인 철학적 입장이다. 그리고 특히 수학에서, 우리가 고려하는 것은 구체적 기호들 자체이며, 우리가 받아들인 관점에 따르면 그것의 형태(Gestalt)는 직접적으로 명료하고 인지가능하다.((1925), p. 376.)

이 인용문에서 주목할 것은 힐베르트가 “수학은 논리학으로부터 독립적인 어떤 내용을 지니고 있다”고 보았다는 점, 그리하여 구체적으로는 “논리적 추론에 선행해서 어떤 논리 외적인 구체적 대상들이 직관적으로 주어져야 한다”고 보았다는 점이며, “논리적 추론이 신뢰가능하려면, 그 구체적 대상들을 완전히 조망하는 것이 가능해야 한다”고 보았다는 점이다.[2] 또한 힐베르트는 논리 외적인 구체적 대상들의 “존재와 양태, 그리고 결합은 우리에게 직관적으로 직접 주어져 있어야 한다”고 강조하고 있는데, 이는 그의 “유한

---

2) 비트겐슈타인 또한 후기 철학에서 수학과 논리학이 독립적이라고 보고 있으며, 힐베르트의 “조망가능성” 개념을 받아들여, “증명은 조망 가능해야 한다”고 주장한다.

주의적 방법"과 관련이 있다.

이제 나는 형식주의에 대한 힐베르트의 생각을 간략하게 고찰해 보겠다. 힐베르트의 형식체계는 우리가 현재 알고 있는 공리체계와 유사하다. 즉 형성규칙들과 공리들, 그리고 추론규칙 및 대입규칙으로 이루어져 있다는 점에서 힐베르트의 형식체계는 공리체계와 유사하다. 반면에 힐베르트의 "형식체계"의 개념은 매우 독자적인 것이다. 그는 형식체계를 구성하는 것들이 모두 "이상적 대상"(ideal objects)이라고 말한다. 그렇다면 "이상적 대상이란 무엇인가?

힐베르트는 "2 + 3 = 3 + 2"와 같은 산술적 명제를 '실제 명제'라고 부르고, "x + y = y + x"와 같은 대수학의 명제를 '이상적 명제'라고 부른다. 그에 따르면, "2 + 3 = 3 + 2"와 같은 실제 명제는 어떤 내용을 담고 있으며, 그리하여 어떤 내용적인 것을 직접 전달한다. 반면에 "x + y = y + x"와 같은 이상적 명제는 임의의 수에 대해서 성립하는 것으로서, 더 이상 어떤 내용적인 것을 직접 전달하지 않으며, 오히려 어떤 한 형식적 대상이고 이상적 대상이다.

그렇다면 이러한 이상적 대상은 왜 도입되어야 하는가? 힐베르트는 다음의 두 가지 대답을 제시한다. 첫째, 유한주의자 정신(finitist frame of mind)에서는 배중률과 같은 아리스토텔레스 논리학의 법칙들이 적용될 수 없는 '문제성 있는' 명제가 존재한다.3) 따라서 논리학의 법칙들을 포기하지 않기 위해서는 그러한 문제성

3) 힐베르트가 제시하는 '문제성 있는' 명제는 "a + 1 = 1 + a"와 같은 '보편언명'인데, 이 때 a에는 임의의 어떤 특정한 수도 대입될 수 있으며, a는 바로 그러한 수를 나타낸다. 힐베르트에 따르면, 이와 같은 명제는 무한히 많은 특정 명제들의 연언으로 해석될 수 없으며, 이 때문에 "유한주의자의 관점에서는 부정될 수 없고, 어떤 숫자(Zahlzeichen: 수기호)가 주어질 때 어떤 것을 주장하게 되는 가언적 판단으로만 해석될 수 있다." 이 명제가 부정될 수 없는 이유는 "a + 1 $\neq$ 1 + a"가 성립하는 어떤 한 수가 존재한다는 명제가 어떤 유한적 의미도 지니고 있지 않기 때문이다. 참고: 박정일(1999, 2000).

있는 명제들을 형식화해야 하며, 바로 이것이 이상적 명제들 또는 이상적 대상들이다. 둘째, 이상적 명제들이나 대상들을 수학에 도입하는 것은 이미 수학에서 이루어지고 있는 것으로서 "이상적 원소들(elements)의 방법"이다. 이상적 원소들의 방법에 따르면, 예컨대 무한대의 점들(points at infinity)과 무한대의 한 직선(a line at infinity)과 같은 이상적 원소들이 도입되면 두 직선이 항상 오직 한 점에서 서로 교차한다는 명제가 보편타당하게 된다. "'무한대'에 있는 이상적 원소들은 연결 법칙들의 체계를 가능한 한 단순하고 조망 가능하게 만든다는 장점을 지니고 있다."((1925), pp. 372-373.) 또한 그는 허수((1925), p. 373, p. 379.), 음수((1927), p. 471.), 2와 1 + 5i에 대한 이상적 공약수((1925), p. 379.) 등의 예를 제시하고 있으며, 더 나아가 칸토어의 초한수도 그에 따르면 이상적 원소이다.

힐베르트는 이상적 대상과 이상적 명제를 도입해야 하는 이유와 실제 수학을 형식화하는 것이 필요한 이유를 다음과 같이 요약하고 있다.

> 전적으로 문제성 없는 이들 기본적인 명제들 외에도 우리는 예를 들어 [부분 명제들에로] 분해되지 않는 문제성 있는 유한 명제들에 마주치게 된다. 마지막으로, 우리는 통상적인 논리학의 법칙들이 모두 성립한다는 것을 보장하기 위해서 이상적 명제들을 도입했다. 그러나 이상적 명제들, 즉 정식[논리식]들은 그것들이 유한적 주장들을 표현하지 않는 한에서 그 자체로는 아무 것도 의미하지 않으며, 논리적 연산들은 그것들이 유한 명제들에 적용되었던 것과 같이 내용적인 방식에서 그것들[이상적 명제들]에 적용될 수 없다. 따라서 논리적 연산과 더불어 수학적 증명들 자체를 형식화하는 것이 필요하다.((1925), pp. 380-381.)

더 나아가 힐베르트는 그러한 형식화가 산술뿐만 아니라 논리학 전반에로 확장되어야 한다고 주장한다. 그리하여 대수의 수식[논리

식]들이 이상적 명제인 것과 마찬가지로 논리학의 명제도 이상적인 명제가 된다.

> 확실하게도, 그것[논리 계산]은 원래는 완전히 다른 맥락에서 창조되었으며, 그에 따라 그것의 기호들은 처음에는 의사소통의 목적을 위해서만 도입되었다. 그러나 만일 우리가 이제 수학적인 기호들에 했던 바와 같이 논리학적인 기호들로부터 모든 의미를 제거한다면, 그리고 논리 계산의 논리식들이 그 자체로는 아무것도 의미하지 않으며 오히려 이상적 명제들이라고 공언한다면 우리의 이런 과정은 정합적[무모순적]인 것이 될 것이다. (……) 따라서 내용적 추론은 규칙들에 따른 기호들의 조작으로 대치되고, 이러한 방식으로 소박한 처리에서 형식적인 처리에로의 완전한 이행이 달성된다.((1925), p. 381.)

3. 비트겐슈타인과 형식주의

실제의 수학을 형식화한 결과, 즉 형식체계를 다루는 것은 곧 이상적 대상과 이상적 명제를 다루는 것과 같다. 그런데 힐베르트에 따르면, 이러한 이상적 대상들은 모든 의미가 제거된 것으로서, 아무 것도 의미하지 않는다. 그리하여 실제 수학이나 논리학에서의 내용적 추론은 형식화된 상황에서는 “규칙들에 따른 기호들의 조작”으로 된다. 그리하여 수학은 무의미한 기호들로 하는 조작이나 놀이라는 힐베르트의 형식주의의 착상이 완성된다.

이러한 형식주의의 착상이 체계적으로 제시된 것은 힐베르트의 논문 “무한에 관하여”(1925)임을 주목하자. 비트겐슈타인의 『논리철학논고』가 출판된 것이 1922년이고, 당시 그의 수학철학이 프레게와 러셀의 영향을 완전히 벗어난 것이 아니었음을 감안한다면, 이러한 형식주의의 착상은 비트겐슈타인에게는 전혀 새로운 것이었다. 더구나 1929년에 그가 철학에 복귀하는 상황에서 “색깔배제 문

제”가 제기됨으로써 『논리철학논고』의 진리함수 이론과 그림 이론이 무너지고, 또 『논리철학논고』의 수학철학이 대단히 불안정한 것이었음이 드러나고 있었다. 이러한 상황에서 힐베르트의 “형식주의”는 비트겐슈타인에게는 자신의 어려움을 돌파하게 하는 실마리로 작용했을 것이다.

철학에 복귀하는 과정에서 1930년 6월 19일, 비트겐슈타인은 빈학파의 슐리크 및 바이즈만과의 대화에서 형식주의에 대해 다음과 같이 말한다.

> 형식주의는 부분적으로 옳고 부분적으로 그르다.
> 형식주의에서 옳은 것은 모든 구문론(syntax)이 놀이의 규칙들의 체계로서 생각될 수 있다는 것이다. 나는 바일이 형식주의자는 수학의 공리들을 장기 규칙들과 같은 것으로서 여긴다고 말할 때 그가 의미할 수도 있는 것에 대해서 생각해 보았다. 나는 수학의 공리들뿐만 아니라 모든 구문론이 임의적이라고 말하고 싶다.
> (……)
> 이 지점이 형식주의가 옳은 곳이다. **프레게**는 산술의 수들이 기호라는 생각에 대해서 반대한다는 점에서는 옳았다. 기호 ‘0’은, 결국, 그것이 기호 ‘1’에 더해졌을 때 기호 ‘1’을 산출하는 속성을 지니고 있지 않다. 다만 그는 다른, 형식주의의 정당화되는 쪽, 즉 수학의 상징들은, 비록 그것들이 기호들은 아닐지라도, 의미(Bedeutung, meaning)를 결여한다는 것을 보지 못했다. 프레게에게 갈래길(alternative)은 이러했다: 우리는 종이 위에 있는 잉크로 된 선들을 다루거나 이 잉크로 된 선들은 **어떤 것**의 기호들이고 그것들의 의미는 그것들이 대리하는 것이다. 장기 놀이 자체는 이러한 갈래길들이 잘못 생각된 것임을 보여준다—비록 우리가 다루고 있는 것은 나무로 된 말(chessman)은 아닐지라도, 이러한 형태들(figures, 장기 말들)은 어떤 것도 대리하지 않으며, 그것들은 프레게가 뜻하는 바의 어떤 의미도 지니지 않는다. 여전히 세 번째 가능성이 존재하는데, 그 기호들은 그것들이 그 놀이에서 사용되는 방식으로 사용될 수 있다. 만일 여기에서 (장기에서) 당신이 ‘의미’에 관해서 이야기하고자 한다면, 가장 자연스럽게 말하는 것은 장기의 의미는 모든 장기 놀이들이 공통으로 갖고 있는 것이라는 것이다.(WVC, pp. 103-105.)

비트겐슈타인은 힐베르트의 형식주의가 어떤 점에서는 옳지만, 전체적으로는 옳지 않다고 주장하고 있다. 이 인용문에서 그는 의미에 대한 프레게의 생각, 즉 한 언어적 표현의 의미를 뜻과 지시체로 구분하고, 그 이외의 의미를 인정하지 않았던 프레게의 생각을 비판하고 있다. 프레게에게는 수학에 나오는 기호는 뜻이나 지시체를 지니거나, 그렇지 않다면 잉크로 그려진 선에 불과하다. 비트겐슈타인은 (형식주의의 생각을 빌려) 프레게가 세 번째 가능성이 있다는 것을 간과하였다고 비판한다. 즉 장기 놀이에서 장기말, 예컨대 졸은 그 어떤 것도 가리키지 않지만(그리하여 프레게의 의미에서, 뜻과 지시체를 지니지 않지만), 장기 놀이에서 사용되는 방식으로 그 의미를 지닐 수 있으며, 졸의 의미는, "그것에 대해 성립하는 규칙들의 총체"(WVC, p. 150.)라고 말할 수 있다. 마찬가지로 수학에서 사용되는 수기호(numeral, 숫자)의 의미 또한 "그것에 대해서 성립하는 규칙들의 총체"(WVC, p. 150.)라고 말할 수 있다는 것이다. 요컨대 비트겐슈타인은 힐베르트의 생각을 통하여 프레게의 의미 이론을 비판함으로써, 자신의 『논리철학논고』의 한계를 보는 한편, 그 한계를 극복할 수 있는 실마리를 찾고 있는 것이다. 그리하여 그는 "형식주의에서 옳은 것은 모든 구문론(syntax)은 놀이의 규칙들의 체계로서 생각될 수 있다는 것"이라고 말하고 있다.

혹자는 이 지점에서 프레게의 의미 이론에 대한 비트겐슈타인의 평가가 정확하지 않고 오히려 프레게의 이론을 왜곡하고 있다고 지적할 수도 있을 것이다. 왜냐하면 프레게는 의미를 명시적으로 뜻과 지시체로 구분했는데, 위의 언급에서는 비트겐슈타인이 그저 지시체로서의 의미만을 거론하고 있는 것처럼 보이기 때문이다. 그러나 이러한 지적이 반드시 옳은 것은 아니라는 점은 다음의 언급을 보면 알 수 있다.

> 다음은 철학에서 계속 되풀이해서 일어나는 어려움이다: 우리는 "의미"를 상이한 방식들로 사용한다. 한편으로 우리는 우리가 어떤 것을 말할 때 우리의 정신 안에서 지나가는 것, 또는 어떤 것을 설명하기 위해서 우리가 지적하는 것을 의미에 대한 기준으로서 간주한다. 다른 한편으로 우리는 시간이 지나감에 따라 우리가 낱말이나 문장에 대해 행하는 사용을 그 기준으로서 간주한다.(LFM, p. 182.)

> 중요한 점은 한 낱말의 의미가 두 가지 상이한 방식으로 표상(represent)될 수 있다는 것을 보는 것이다: (1) 어떤 이미지나 그림, 또는 그 낱말에 대응하는 어떤 것에 의해, (2) 그 낱말의 사용에 의해—이는 또한 그 그림의 사용에도 해당한다.(LFM, p. 190.)

이러한 비트겐슈타인의 언급을 살펴보면 그는 프레게의 지시체와 뜻에 해당되는 것을 한 부류로 삼고 있으며(더구나 이 부류에는 '관념'(이미지)과 '그림'도 포함되어 있다), 그것에 대조되는 것으로서 '사용'을 거론하고 있다는 점을 알 수 있다.[4]

어쨌든 비트겐슈타인은 수학을 '놀이'로서 파악**할 수 있다**는 것이 형식주의에서 옳은 부분이며, 그리하여 의미를 "놀이의 규칙들의 총체"로 파악할 수 있다는 것을 힐베르트와 바일에게서 받아들인다. 반면에 비트겐슈타인은 형식주의를 날카롭게 비판하고 있는데, 바로 이 지점이 그의 수학철학에서 가장 독창적인 부분이다. 그는 다음과 같이 형식주의를 비판한다.

---

4) 또한 비트겐슈타인은 어떤 한 기호가 이상적 대상을 지칭한다고 말하는 것은 프레게의 지시체를 뜻하지 않으면서도 어떤 사용을 암시하고 있다는 점에서 흥미롭다고 말하고 있다. "'이상적 대상.' "기호 'a'는 어떤 이상적 대상을 지칭한다"는 명백하게도 그 의미에 대해서, 따라서 'a'의 사용에 대해서 뭔가를 진술할 것이다. 그리고 그것은 당연하게도 이 사용이 어떤 관점에서는 어떤 대상을 갖는 기호의 사용과 비슷하다는 것, 그리고 그것은 어떤 대상도 지칭하지 않는다는 것을 뜻한다. 그러나 '이상적 대상'이라는 표현이 이 사실로부터 무엇을 만드느냐는 흥미롭다."(RFM, Ⅳ부 5절.)

> 계산의 **적용**은 스스로를 돌보지 않으면 안 된다. 그리고 바로 이것이 '형식주의'에 관해서 옳은 것이다.(RFM, Ⅱ부, 4절.)

> "장기의 이론은 임의적이지 않다."—그것은 임의적이지 않다. 수학은 오직 그것이 어떤 **명백한** 적용을 지닌다는 의미에서 임의적이지 않다. 반면에 장기는 그 방식으로 명백한 적용을 얻지 않았다. 이 점이 그것이 놀이인 이유이다.(LFM, p. 150.)[5)]

비트겐슈타인에 따르면 장기는 "명백한 적용"을 지니고 있지 않은 반면 수학은 "명백한 적용"을 지니고 있다. 바로 그래서 장기는 놀이이지만, 수학은 단순히 놀이인 것은 아니다. 형식주의는 수학과 계산을 놀이로 파악하고 있지만, 이는 그 적용을 간과하는 처사이다. 우리는 형식주의와 같이 수학이나 계산을 전혀 "적용"을 고려하지 않고서, 놀이라는 측면에서 파악**할 수 있다**. 그러나 본래 우리의 수학과 계산은 "적용"과 분리할 수 없고, 그래서 임의적인 것이 아니며, 그리하여 수학이 단지 놀이인 것은 아니다. 오히려 그에 따르면 수학은 "규범적"(RFM, Ⅴ부 40절)이며, "규범들의 그물을 형성한다."(RFM, Ⅴ부 46절.)

그럼에도 불구하고 비트겐슈타인이 수학을 놀이로서 파악할 수 있다는 형식주의의 통찰을 (부분적으로) 받아들이고 있다는 점을 주목하자. 이러한 생각은 대단히 중요하다. 우리는 이 점을 두 가지로 정리할 수 있다. 첫째, 수학을 '놀이'로서 파악하는 것은 수학을 이론체계가 아니라 인간의 활동, 인간의 행위라는 관점에서 바라보게 하는 것을 가능하게 한다. 비트겐슈타인의 '언어놀이'가 언어와 얽혀 있는 행동들의 전체라는 점을 상기하라. 둘째, 수학을

---

5) 또한 비트게슈타인은 다음과 같이 말한다: "만일 내가 언어의 구문론을 장기의 놀이로부터 구분하는 것이 무엇이냐고 질문을 받는다면, 나는 그것은 그것의 적용이고 그 외의 것이 아니라고 대답한다."(WVC, p. 104.) "그것[언어의 구문론]의 적용과 분리시키고 그것 자체만을 고려한다면 그것은 하나의 놀이이고, 그저 장기와 같다."(WVC, p. 104.)

놀이로서 파악하는 것은 한 언어적 표현의 의미를 사용의 관점에서, 특히 "놀이의 규칙들"의 관점에서 바라보는 것을 가능하게 한다. 한 언어적 표현의 의미를 바로 이렇게 바라보는 것은 프레게나 브라우어와는 완전히 다른 것이다.

4. 비트겐슈타인과 메타수학

앞에서 지적했듯이, 힐베르트의 프로그램이란 실제 수학을 형식화하여 그 형식체계가 무모순이라는 것을 유한적 방법으로 메타수학(증명이론)에서 증명하려는 계획을 말한다. 여기에는 형식화 및 형식체계, 유한적 방법, 메타수학, 무모순성 증명이라는 네 가지 항목이 있다. 비트겐슈타인은 형식화 및 형식체계와 유한적 방법에 대해서는 거의 문제 삼지 않는다. 그는 공리체계와 형식체계에 대해서 부정적인 면을 보기도 하고, 또 '유한주의'에 대해서 거론하기도 하지만, 힐베르트의 생각에 대한 직접적인 비판이라고는 할 수 없다.[6]

힐베르트의 프로그램에 대한 비트겐슈타인의 비판은 주로 메타수학과 무모순성 증명을 향하고 있다. 이 절에서는 1929년-1934년 기간에 작성되거나 서술된 『비트겐슈타인과 빈 학파』, 『철학적 고찰』, 『철학적 문법』에서 비트겐슈타인이 힐베르트의 '메타수학'에 대해서 어떻게 비판했는지를 살펴보고자 한다.

비트겐슈타인은 힐베르트 프로그램의 주요한 착상인 '메타수학'에 대해서 직접적으로 공격을 하고 있다. 매우 놀랍게도, 그는 **'메타수학'이 존재하지 않는다**고 주장한다. 만일 이러한 주장이 옳다

6) 비트겐슈타인이 '유한주의'를 거론할 때(가령, RFM, 부론2, 17절.), 이때의 유한주의는 "엄격한 유한주의", 즉 무한은 어떤 형태로든 존재하지 않는다는 주장이며, 이것은 힐베르트의 "유한주의"와는 직접적인 관계가 없다.

면, 이는 힐베르트 프로그램에 대해 중대한 타격을 가하게 될 것이다. 그렇다면 그 근거란 무엇인가?

그 주된 논점은 힐베르트의 '메타수학'은 그저 하나의 수학일 뿐이고 "위장된" 수학일 뿐이라는 것이다. 비트겐슈타인에 따르면, "힐베르트의 '메타수학'은 위장된 수학인 것으로 판명되어야 한다."(WVC, p. 136) 하나의 수학에 대해서 더 근원적인 수학이라는 의미에서 '메타수학'은 존재하지 않는다는 것이다. 이제 그가 언급한 것을 살펴보면서 그 근거를 정리해 보자.

> 수학은 종이 위에 있는 기호들에 대한 것인가? 장기가 나무 조각에 대한 것이 아닌 것과 마찬가지로 그렇지 않다.
> 우리가 수학적 명제들의 뜻에 대해 이야기하거나 그것들이 무엇에 대한 것인지 이야기할 때, 우리는 잘못된 그림을 사용하고 있다. 여기에서도, 나는 이렇게 생각하는데, 어떤 공통된 본질적인 요소, 즉 뜻을 지니는 비본질적인, 임의적인 기호들이 존재하는 것처럼 보인다.
> 수학은 계산체계이고 그리하여 실제로 어떤 것에 **대한** 것도 아니기 때문에, 어떤 메타수학도 존재하지 않는다.(PG, p. 290.)

이 인용문에서 비트겐슈타인은 수학적 명제들은 (실제 세계의) 어떤 것에 대한 것이 아니기 때문에, "수학적 명제들의 뜻에 대해 이야기"하는 것은 "잘못된 그림을 사용"하는 것이며, 그리하여 "어떤 메타수학도 존재하지 않는다"고 주장하고 있다. 논리학의 명제들과 수학의 명제들이 자연과학의 명제들과 달리 뜻을 결여하는 명제라는 생각은『논리철학논고』의 생각이기도 하다. 비트겐슈타인은 이 생각을 토대로, 수학적 명제는 실제 세계의 어떤 것에 대한 것이 아니며, 따라서 메타수학은 존재하지 않는다고 주장하고 있다.

이제 우리는 이러한 비트겐슈타인의 논변을 "**(수학의 명제의) 뜻 결여성 논변**"이라고 부를 수 있다. 이 논변은 이렇다: 수학의 명제와 논리학의 명제는 뜻을 결여하고 있으며, 실제 세계의 어떤 것에

대한 것이 아니다. 반면에 메타수학은 그것이 존재한다면 어떤 것에 대한 것이다. 따라서 메타수학은 존재하지 않는다.

다음으로 비트겐슈타인은 수학의 "증명들의 위계란 존재할 수 없기" 때문에 메타수학은 존재할 수 없다고 주장한다.

> 증명 가능성의 증명이란 무엇인가? 그것은 명제의 증명과는 다르다. 그리고 증명 가능성의 증명은 아마도 한 명제가 뜻이 있다는 증명인가? 그러나 그렇다면, 그러한 증명은 그 명제의 증명이 의존하는 원리들과는 **완전히 상이한** 원리들에 의존해야만 할 것이다. 증명들의 위계란 존재할 수 없다!
> 한편 어떤 근본적인 의미에서도 메타수학과 같은 것은 존재할 수 없다. 모든 것은 한 가지 유형이어야 한다(또는 같은 말이지만, 어떤 한 유형이 아니어야 하거나).(PR, p. 180.)

이러한 비트겐슈타인의 주장은 여전히 『논리철학논고』의 생각을 이어받은 것이기도 하다. 즉 『논리철학논고』에 따르면, "논리학의 모든 명제들은 같은 자격을 지닌다. 그것들 중에 근본 법칙들과 파생 법칙들은 본질적으로 존재하지 않는다."(6.127) "논리학은 언제나, 모든 명제 각각이 그 자신의 증명이게끔 그렇게 파악될 수 있다."(6.1265) 따라서 논리학의 명제와 증명에 대한 『논리철학논고』의 견해로부터 "증명들의 위계란 존재할 수 없다"는 주장은 직접 따라 나온다.

이제 우리는 이러한 비트겐슈타인의 논변을 "**(증명의) 위계의 존재 불가능성 논변**"(또는 "**(논리학의 명제의) 자격 동등성 논변**")이라고 부를 수 있다. 이 논변은 이렇다: 모든 수학적 명제와 모든 논리학적 명제는 같은 자격을 지니며, 그리하여 모든 논리학의 증명과 수학의 증명은 위계가 있을 수 없다. 반면에 메타수학이 존재한다면 증명은 위계를 지니게 된다. 따라서 메타수학은 존재할 수 없다.

마지막으로 비트겐슈타인은 하나의 놀이에 대해서 '메타놀이'란

존재하지 않는다는 점에서 '메타수학'은 존재하지 않는다고 주장한다.

> 나는 어떤 규칙들에 따라서 말들로 놀이를 할 수 있다. 그러나 나는 또한 내가 규칙들 자체로, 즉 이제 장기의 규칙들은 나의 놀이의 말들이고 논리의 법칙들은 예컨대 놀이의 규칙들이라는 규칙들 자체로 놀이하는 한 놀이를 발명할 수도 있다. **이 경우에 나는 또 다른 놀이를 여전히 갖게 되며, 메타놀이(metagame)를 갖게 되는 것은 아니다.**
> 힐베르트가 하는 것은 수학이며 메타수학이 아니다. 그것은 또 다른 계산이며, 이는 어떤 다른 것[계산]과도 같다.(WVC, p. 119.)

이 인용문에서 비트겐슈타인은 한 놀이에 대해서 그것에 관한 놀이인 것처럼 보이는 놀이(즉 '메타놀이')를 논의하고 있다. 그는 메타놀이가 존재할 수 없으며, 메타놀이 또한 그저 하나의 놀이에 불과하다고 주장하고 있다. 그렇다면 그 주장의 근거란 무엇인가? 바이즈만은 장기 놀이에 대해서 '장기의 이론'이 존재하듯이, 실제 수학과 계산에 대해서도 그 '이론'이 존재한다면, 바로 이것이 힐베르트의 메타수학일 것이라고 주장한다. 이러한 주장에 대해서 비트겐슈타인은 다음과 같이 대답하고 있는데, 이 인용문은 다소 길지만 충분히 인용할 가치가 있다.

> **바이즈만이 질문한다**: 장기의 이론은 존재하는가? 그렇다. 존재한다. 따라서 우리는 이 이론을 사용함으로써 그 놀이의 가능성들에 대해서 배울 수 있다—예컨대 어떤 포진에서 내가 여덟 번의 수순으로 장군을 부를 수 있는지 여부 따위를 말이다. 그렇다면, 만일 장기의 이론이 존재한다면, 나는 왜 산술의 놀이의 이론도 존재하지 않아야 하는지, 또 왜 우리가 이 이론의 명제들을 사용함으로써 이 놀이의 가능성들에 대해서 어떤 실질적인 것을 배울 수 없어야 하는지 그 이유를 알 수 없다. 이 이론이 힐베르트의 메타수학이다.
>
> **비트겐슈타인:** '장기의 이론'이라고 불리는 것은 어떤 것이든 그것을 기술하는 하나의 이론이 아니며, 오히려 일종의 기하학이다. 물

론 그것은 다시 하나의 계산이며, 이론이 아니다.

이 점을 분명하게 하기 위하여, 나는 당신에게 당신의 견해에 따르면 다음의 두 가지 명제들 사이에 어떤 차이가 있는지를 물어야 하겠다: '나는 여덟 번의 수순으로 거기에 이를 수 있다'와 '그 이론에 의해서 나는 내가 여덟 번의 수순으로 거기에 이를 수 있다는 것을 증명했다.'[에 말이다] 아니다[어떤 차이도 없다]. 왜냐하면 만일 그 이론에서 장기판과 장기 말을 사용하는 것 대신에 내가 만일 한 기호법을 사용한다면, 내가 여덟 번의 수순으로 거기에 이를 수 있다는 증명(demonstration)은 그 기호법에서 실제로 내가 거기에 이른다는 것, 그리하여 기호들로 장기판에서, 내가 장기 말로 하는 것을 하는 것에 있다. 만일 내가 어떤 수(move)를 두고 그것들의 가능성을 증명한다면—나는 그 증명에서 동일한 것을 다시 한 것이 될 것이다. 그렇게 되면, 나는 그 수를 기호법적으로 둔 것이 될 것이다. 빠진 것은 사실상 오직 실제 수를 두는 것이며, 우리는 작은 말 조각을 판에서 움직이는 것이 비본질적인 것이라는 데 동의한다(그렇지 않은가?).

그 증명에서 나는 내가 그 놀이에서 하는 것과 동일한 것을 한다. 이는 내가 다음과 같이 말하는 것과 같다: 바이즈만씨, 당신은 합을 하고 있습니다. 그러나 나는 어떤 숫자들이 당신의 결과일지를 예측하겠습니다. 이 경우에 나는 아마도 다른 기호들을 사용하여, 동일한 합을 두 번째로 한다. (또는 상이하게 생각된, 동일한 기호들을 사용하여). 나는 합을 하는 것의 결과를 다시 **계산**할 수 있다. 나는 이 결과를 어떤 전적으로 다른 방식으로 줄 수 없다. 그것은 당신이 합을 하는 사람이었고 반면에 나는 하나의 **이론**에 의해 당신의 계산들의 결과를 알게 되는 것과는 같지 않다. 그리고 이는 '장기의 이론'에 대해서도 마찬가지이다.

만일 내가 그러그러한 가능성들이 존재한다는 것을 그 '이론'에서 그렇게 확립한다면, 나는 그 놀이에서 다시 수를 두고 있는 것이지, 메타놀이에서 그러는 것이 아니다. 계산에서 모든 수를 두는 것에 그 놀이에서 한 수를 두는 것이 대응하며, 존재하는 모든 차이는 작은 나무 조각의 물리적인 움직임[수를 둠]에 있을 뿐이다.(WVC, pp. 133-134)

비트겐슈타인에 따르면, 장기 놀이에 대해서 소위 '장기의 이론'을 만든다 하더라도, 이 장기의 이론에서는 원래의 장기의 놀이에서 수를 두고 있는 것을 "다시 두고 있는 것"에 불과하며, 또한 그 차이는 장기 말 나무 조각을 물리적으로 움직이는 것 여부에만 있

을 뿐이다. 그리하여 '장기의 이론'은 하나의 놀이에 불과하고 메타 놀이가 아니며, 그렇기 때문에 '이론'도 아니라고 대답하고 있다. 우리는 이러한 비트겐슈타인의 논변을 "**메타놀이 불가능성 논변**"라고 부를 수 있다.[7]

5. 비트겐슈타인과 무모순성 증명

1929년부터 1934년 기간에 비트겐슈타인은 힐베르트의 메타수학을 인정하지 않는다. 즉 메타수학은 존재할 수 없다는 것이다. 그렇다면 그는 그 기간에 힐베르트의 '무모순성 증명' 계획에 대해서는 어떻게 평가하고 비판하고 있는가?

놀랍게도 비트겐슈타인은 메타수학에 대해서와 마찬가지로, **'무모순성 증명'은 존재하지 않는다**고 주장한다. 만일 이 주장이 옳다면, 이는 힐베르트의 프로그램을 근원적으로 반박하는 것이 될 것이다. 그렇다면 그 근거는 무엇인가? 먼저 그의 언급을 살펴보기로 하자.

> 이제 이러한 이율배반들이 수학의 무모순성과는 하등의 관계도 없다는 것이 말해져야 한다. 여기에는 어떤 연관도 없다고 말이다. 왜냐하면 이러한 이율배반들은 계산에서 일어나지 않고 우리의 일상 언어에서 일어나기 때문이며, 정확하게는 우리가 단어들을 애매하게 사용하기 때문이다. 따라서 이율배반들의 해결은 우리 자신을 불투명하게 표현하는 방식을 (우리의 단어들의 실제 의미를 상기함으로써) 정확한 것으로 대치시키는 것에 있다. 따라서 이율배반들은 **증명**에 의해서가 아니라, **분석**에 의해서 사라진다.
> 만일 수학에서 모순이 불명료성을 통해 일어난다면, 나는 **결코 증명에 의해서 이 불명료성을 내쫓을 수 없다.** 증명은 오직 그것

7) 이 논변은 오직 1930년 당시에만 확인될 수 있는 논변으로서, 전기 비트겐슈타인의 『논리철학논고』에서도, 또 후기 비트겐슈타인의 여러 저작에서도 찾아볼 수 없다.

> 이 증명하는 것만을 증명한다. 그러나 그것은 안개를 걷어낼 수 없다. 필요한 것은 분석이지 증명이 아니다. 증명은 안개를 내쫓을 수 없다.
> 이로써 무모순성의 증명과 같은 것은 없다는 것을 보이는 데 충분하며, (만일 당신이 수학의 모순을 집합론의 모순과 동일한 종류라고 상상한다면), 이 증명은 그것이 하리라고 기대되는 것을 달성할 수 없다는 것을 보이는 데 충분하다.
> 만일 내가 수학의 본성에 대해서 분명하게 파악하고 있다면, 어떤 증명도 나를 도와줄 수 없다. 그리고 만일 내가 수학의 본성에 대해서 분명하게 파악한다면, 그것의 무모순성에 대한 물음은 전혀 일어나지 않는다. (WVC, pp. 121-122.)

이 인용문에 따르면, 비트겐슈타인은 러셀의 역설과 같은 이율배반은 계산에서 일어나지 않고 우리의 일상 언어에서 일어나는데, 단어들을 애매하게 사용했기 때문에 일어난다고 진단하고 있다. 또한 그는 그 해결은 불분명한 표현을 정확한 것으로 대치함으로써, 즉 증명이 아니라 분석에 의해서 해결된다고 주장하고 있다. 따라서 수학에서 모순이 불명료성을 통해 일어난다면, 증명이 아니라 분석에 의해서 그 불명료성이 해결될 수 있을 뿐이며, 그리하여 "무모순성 증명과 같은 것은 없다." 무모순성 증명은 수학자들이 그것에 대해 기대하는 바를 달성할 수 없다.

그렇다면 칸토어의 집합론과 프레게의 체계에서 러셀의 역설이 발견되어 소위 '수학의 위기'가 도래했다는 수많은 수학자와 철학자들의 생각은 어떻게 되는가? 러셀의 역설이 발견된 것과 같이 우리의 산술에서 어떤 모순이 앞으로 발견될 수 있는 가능성은 없는가? 그러한 가능성에 대해서 생각하는 것은 잘못된 것인가? 비트겐슈타인은 증명이 아니라 분석이 필요하다고 말했다. 그렇다면 구체적으로 어떤 분석이 필요한가? 위의 인용문에서 비트겐슈타인의 대답은 이러하다: "만일 내가 수학의 본성에 대해서 분명하게 파악하고 있다면, 어떤 증명도 나를 도와 줄 수 없다. 그리고 만일 내가 수학의 본성에 대해서 분명하게 파악한다면, 그것의 무모순성

에 대한 물음은 전혀 일어나지 않는다." 즉 우리가 수학의 본성을 분명하게 밝히면, 수학의 "무모순성에 대한 물음"은 전혀 일어나지 않으며, 그리하여 무모순성 증명은 필요하지도 않게 된다는 것이다.

그러나 "수학의 본성을 분명하게 파악한다"는 것은 도대체 무엇인가? 그리고 설령 그렇게 파악한다 하더라도 어떻게 해서 "무모순성에 대한 물음"이 전혀 일어나지 않는다는 것인가? 비트겐슈타인이 제시하는 근거는 다음과 같다.

> 당신은 모순을 찾을 수 있는가? 오직 그것을 찾는 방법이 존재할 때이다. 당신이 언젠가 그 규칙들에 따라 진행해 나아감으로써 한 모순에 도달하지 않을지의 여부에 관한 물음은 존재할 수 없다.
> 나는 바로 이것이 무모순성 물음과 관련 있는 모든 것이 의존하고 있는 본질적인 것이라고 믿는다.(WVC, p. 127.)

> 여기에서, 그렇지만, 나는 중요한 언급을 해야 한다. 모순은 오직 **그것이 거기에 존재할 때에만** 모순이다. 사람들은 아무도 보지 못했던 모순이 결핵처럼 처음부터 공리들에서 숨어 있을 수도 있다는 생각을 지니고 있다. 당신은 그 어떤 희미한 생각도 가지고 있지 않는데, 어느 날 당신은 죽는다. 이와 유사하게 사람들은 어느 날 숨어 있는 모순이 돌발할 수도 있으며 그 재앙이 우리를 덮칠지도 모른다고 생각한다.
> 나는 모순을 찾는 어떤 절차도 주어져 있지 않는 한, 우리의 추론들이 **결국에 가서는** 한 모순에 이를지도 모른다고 의심하는 것은 무의미하다고 생각한다.(WVC, p. 119.)

> 내가 말하려는 것은 항상 동일하다. **수학에 대해서** 무모순성 증명은 **삶과 죽음의 문제**일 수 없다.
> 이는, 나는 이렇게 생각하는데, 내가 다음과 같이 질문하지 않아야 한다는 점과 본질적으로 연결되어 있다. "나는 언젠가 한 모순에 도달할 수 있는가?" 하나의 대답을 찾는 절차를 내가 갖고 있는 한에서만 나는 한 질문에 대답할 수 있다. 나는 어떤 것도 **무한히** 찾을 수 없다. (WVC, p. 141.)[8]

---

8) 또한 다음의 언급도 이와 유사하다: "그러나 그 외에 우리의 물음은 무엇을 의미할 수 있는가? 아마도 다음이다: 만일 우리가 추론들을 계속해 나간다

이 인용문들에서 비트겐슈타인은 계산체계에서 모순을 찾는 방법이나 절차가 우리에게 주어져 있다면 오직 그때에만 모순에 이를지도 모른다는 의심이나 물음이 의미가 있다고 주장하고 있다. 그런데 우리에게는 그러한 방법이 주어져 있지 않으므로, 무모순성 물음은 무의미하다는 것이다. 이러한 생각은 『논리철학논고』의 다음의 언급과 관련이 있다: "왜냐하면 의심이란 오직 물음이 존립하는 곳에서만 존립할 수 있고, 물음이란 대답이 존립할 수 있는 곳에서만 존립할 수 있으며, 또 이 대답이란 어떤 것이 **말해질 수 있는** 곳에서만 존립할 수 있기 때문이다"(6.51). 우리는 이러한 『논리철학논고』의 언급과 비교하면, 위의 인용문에서는 대답의 **방법**이나 **절차**(또는 어떤 것을 찾은 **방법**이나 **절차**)가 명시적으로 거론되고 있다는 점을 알 수 있다.

이제 우리는 이러한 비트겐슈타인의 논변을 "**물음의 유의미성 조건 논변**"이라고 부를 수 있다. 이 논변은 이러하다: 한 물음은 그 대답 방법이나 절차가 존재할 때에만 의미가 있다. 또한 어떤 방법이나 절차 없이 무한하게 찾는 것은 진정한 의미의 찾음이 아니다. ("나는 어떤 것도 **무한히** 찾을 수 없다.") 그런데 한 계산체계에서 우리가 어떤 모순에 이를 것이냐 하는 물음은 그 대답 방법이나 절차가 없다. 따라서 무모순성 물음은 무의미하다. 더 나아가 무모순성 증명은 존재하지 않는다.

특히 "물음의 유의미성 조건 논변"은 "숨어 있는 모순"에 대해서 논의하는 것은 아무런 의미도 없다는 비트겐슈타인의 주장의 근거이기도 하다.

면, 어떤 지점에서 모순은 나타날 것이다. 이에 대한 대답은 다음과 같다. "그 모순을 찾는 방법을 우리는 갖고 있는가? 만일 그렇지 않다면, 여기에는 어떤 문제도 없다. 왜냐하면 당신은 어떤 것도 **무한히** 찾을 수 없기 때문이다."(WVC, p. 143.)

> **비트겐슈타인**: 내가 의미하는 것은 간접 증명과는 추호도 관계가 없다. 여기에는 혼동이 있다. 물론 계산에서는 모순들이 존재한다. 내가 의미하는 것은 **숨어 있는 모순들**에 대해서 이야기하는 것은 의미가 없다는 점뿐이다. 숨어 있는 모순이란 결국 무엇이겠는가? 예를 들어서 나는 다음과 같이 말할 수 있다: 수 357567이 7로 나누어질 수 있는 가능성은 생각건대 내가 어떤 기준—나눗셈 규칙—을 적용하지 않는 한에서만 숨어 있다. 숨어 있는 나눗셈가능성을 공개된 것으로 바꾸기 위해서는 나는 단지 그 기준을 적용할 필요가 있다. 이는 모순[의 경우]와 같은가? 명백하게도 그렇지 않다. 나는 하나의 기준을 적용함으로써 하나의 모순을 공개될 수 있게 할 수 없다. 그렇지 않은가? 따라서 나는 숨어 있는 모순에 대한 이러한 모든 이야기는 의미가 없다고 말하며, 수학자들이 이 위험에 대해서—마치 하나의 모순이 질병처럼 현재의 수학에 숨어 있을 수 있는 것처럼—말하는 위험은 한갓 상상이 빚어낸 허구라고 말한다.(WVC, p. 174.)

요컨대 “357567은 7로 나누어질 수 있는가?”라는 물음은 우리에게 나눗셈이라는 방법이 주어져 있기 때문에 의미가 있으며, 우리는 그 물음에 대해서 대답을 찾을 수 있고 대답을 할 수 있다. 반면에 “우리의 계산체계에는 모순이 숨어 있는가?”라는 물음은 우리에게 그 대답의 방법(또는 모순을 찾는 방법)이 없기 때문에 무의미하다. 그리하여 비트겐슈타인에 따르면, 계산체계에서의 모순을 우리 신체의 알지 못하는 질병이나 세균으로 비유하는 것은 오도적이다.

6. 메타수학과 무모순성 증명은 존재하지 않는가?

메타수학과 무모순성 증명이 존재하지 않는다는 중기 (특히 1929년-1934년) 비트겐슈타인의 주장은 (20세기 수학의 눈부신 발전과정을 알고 있는 현재의 관점에서 보면) 과격하고 무모한 것임에 틀림없다. 무엇보다도 이는 문자 그대로 그 주장을 받아들인다면, 힐베르트의 프로그램을 송두리째 부정할 것이기 때문이다. 더구나 우

리는 힐베르트의 프로그램 이후 괴델이 불완전성 정리를 발표하였고, 겐첸이 산술의 무모순성을 증명하였다는 것을 알고 있다. 만일 비트겐슈타인의 저 주장이 옳다면, 이는 비트겐슈타인이 괴델의 불완전성 정리와 유사한 것을 **철학적으로** 수행했다는 것을 뜻하게 될 것이며, 동시에 겐첸의 산술의 무모순성 증명을 무효로 만들게 될 것이다. 물론 비트겐슈타인의 저 주장은 괴델과 겐첸의 정리가 발표되기 **이전에** 제기된 것이다. 그러나 그렇다 하더라도 이건 너무 심하지 않은가?! 왜냐하면 만일 비트겐슈타인의 주장이 옳다면, 그는 어떤 면에서는 수학자들이 그토록 치밀하고 정교하게 증명한 것을 단번에 철학적으로 해결하고 증명한 것이 되기 때문이다. 그러나 어떻게 수학이 하는 일을 철학이 할 수 있단 말인가?!

그렇다면 이러한 비트겐슈타인의 과격한 생각은 1939년 이후, 『수학의 기초에 관한 강의』와 『수학의 기초에 관한 고찰』에서도 그대로 유지되었을까? 사실상 나는 힐베르트의 프로그램에 관한 한, 비트겐슈타인의 수학철학에서 가장 미묘한 부분이 바로 이 지점이라고 생각한다. 우선 나는 비트겐슈타인의 저 과격한 주장은 후기 수학철학에서 더 이상 유지되지 않았다고 생각한다. 무엇보다도 후기 저작들에서는 그러한 주장이 어느 곳에서도 확인되지 않는다. 혹자는 비트겐슈타인의 수학철학에 일관성을 부여하면서, 그러한 주장은 그대로 유지되었지만 이 저작들에서 비트겐슈타인이 다시 거론하지 않은 것에 불과하다고 주장할지도 모른다.[9][10] 그러

9) Shanker(1986, 1988)는 비트겐슈타인의 수학철학에 대한 여러 학자들의 거센 반발과 비난을 방어하면서, 비트겐슈타인 자신이 저 주장을 결국 포기했다는 사실을 간과하고 있다. 그는 1988에서 괴델의 불완전성 정리에 대한 비트겐슈타인의 1937-8년의 생각(RFM, 부론 Ⅰ)과 1944년의 생각(RFM, Ⅴ부)이 일관성을 유지하고 있을 뿐만 아니라(참고: pp. 240-241), 힐베르트 프로그램에 대해서도 비트겐슈타인의 1929년의 생각이 후기에도 그대로 유지되고 있다고 보고 있다.(참고: pp. 207-216.)

10) 본 논문의 주장에 대해 한 심사위원은 비트겐슈타인이 중기뿐만 아니라 후

나 나는 이렇게 생각하는데, 오히려 이 저작들에서는 과거의 과격한 주장들을 반대하는 언급들이 확인될 뿐이다. 그리고 미묘하고 어려운 것은, 비트겐슈타인이 과거의 어떤 생각을 포기했고 또 어떤 생각을 유지했는지를 구분하는 것이다.

나는 힐베르트의 프로그램에 관한 한, 1929년-1934년 당시의 비트겐슈타인의 과격한 생각은 1940년대에 완전히 바뀌었다고 생각한다. 그러나 그러한 과격한 주장에 대해서 비트겐슈타인 자신이 명시적으로 비판하는 내용은 확인하기 어렵다. 그럼에도 불구하고 나는 그 당시의 생각에 대한 가능한 비판을 수행함으로써 이를 바탕으로 1940년대의 비트겐슈타인의 생각을 조명하고자 한다.

먼저 힐베르트의 프로그램에 대한 비트겐슈타인의 생각을 정리해 보자. 그는 메타수학과 무모순성 증명이 존재하지 않는다고 주장한다. 이때 그가 제시한 논변은 (1) (수학적 명제의) 뜻 결여성 논변 (2) (수학적 증명의) 위계의 존재 불가능성 논변 (3) 메타놀이 불가능성 논변 (4) 물음 유의미성 조건 논변이었다.

(1)과 (2)에 대해서는 거의 동일한 비판을 제기할 수 있다. 우선 우리는 수학적 명제가 자연과학의 명제와는 달리 뜻을 결여하며, 또 수학적 증명들은 한 유형이라는 비트겐슈타인의 주장에 동의할 수 있다. 그리고 “2 + 3 = 5”와 같은 산술적 명제는 사과에 적용될 수 있지만, 사과에 대한 것은 아니다. 즉 그러한 산술적 명제는 실제 세계에 존재하는 대상에 관한 것이 아니다. 그런데 수학적 명제들 중에는 독특한 것이 있다. 즉 수학 자체에 적용되는(또는 적

기 철학에서도 괴델의 정리를 “일반적으로 수리철학자들이 인정하는 바로는 인정하지 않았다”는 점을 강조하면서 괴델의 정리에 대해 일관성 있는 주장을 했다고 비판하였다. 물론 나는 이러한 비판이 적절하지 않다고 생각한다. 분명히 이 주제를 심도 있게 다루는 것은 독립적인 논문이 요구될 것이다. 다만 나는 현재로서는 이 주제와 관련하여, “과학의 형이상학 국제학술대회”(2010)에서 “Wittgenstein on Gödel’s Incompleteness Theorem”(2010)을 발표하였고, 현재 이 논문은 투고심사 중임을 밝혀둔다.

용되는 것처럼 보이는) 수학적 명제가 그것이다. 예컨대 자와 컴퍼스로 하는 작도를 생각해 보자. 주어진 각에 대해서 2등분이나 4등분 작도가 가능하다는 것은 직접 작도를 통해서 알 수 있다. 이렇게 작도 가능한 경우를 체계적으로 정리하면 우리는 유클리드 기하학을 얻게 될 것이다. 이제 주어진 각에 대해서 3등분하는 것이 가능한지 물음이 제기된다. 현대 대수학에서는 각3등분 작도가 불가능하다는 것이 증명되었다. 그렇다면 유클리드 기하학에서 각3등분 작도를 찾는 일을 멈추게 한다는 점에서 그 적용을 획득할 수 있다면, 현대 대수학은 유클리드 기하학에 **대한** 것이라고 말할 수 없는가? 요컨대, 수학을 다시 수학 자체에 적용하는 것이 가능하다면, 바로 이러한 의미에서 여전히 "…에 대한"이란 낱말은 어떤 사용을 지닐 수 있고, "증명들의 위계" 또한 그러하며, 그리하여 '메타수학'이라는 용어는 어떤 정당한 사용을 지닐 수 있다.[11)]

마찬가지로 가령 현대 바둑에서 6집반을 덤으로 할 때, 먼저 두는 사람이 항상 이길 수 있는 방법이 있느냐 하는 점은 '바둑에 대한 (수학적) 이론'에서 밝혀질 수 있을지도 모른다. 또는 3점을

---

11) 여기에서 가장 중요한 것은 "…에 대한"이란 낱말이 어떤 정당한 사용을 취득할 수 있는가 하는 점이다. 비트겐슈타인이 메타수학은 존재하지 않는다고 주장할 때 그는 어떤 상황에서도 메타수학과 관련하여 "…에 대한"에 대한 정당한 사용이 존재하지 않는다고 주장하고 있다. 바로 이러한 주장에 대해서 우리는 어떤 다른 가능성들을 제기할 수 있다. 실제로 비트겐슈타인은 (LFM, pp. 250-251.)에서 "철수는 파란 바지를 입고 있다"는 바지에 대한 것이지만, "2 + 2 = 4"는 2에 대한 것이 아니라고 주장한다. 그에 따르면 산술적 명제가 수에 대한 것이라고 말하는 것은 철학적 혼란을 야기한다. 그러나 그럼에도 불구하고 그는 그러한 철학적 혼란이 야기되지 않는 한에서, 산술적 명제가 수에 대한 것이고 기하학의 그러그러한 명제가 원에 대한 것이라고 말하는 것은 아무 문제도 없다는 점을 지적한다. 이렇게 "…에 대한"이란 낱말에 대한 전적으로 상이한 의미(sense)가 가능하다면, 결국 '메타수학'이라는 용어에도 어떤 정당한 의미를 부여하는 것이 가능하게 될 것이다.

먼저 깔고 두는 경우 반드시 이기는 방법이 존재한다는 것을 밝히는 것은 가능할 수 있다. 이와 같이 우리는 바둑의 놀이를 대상화하여 여러 가능성들을 탐구할 수 있다. 마찬가지로 장기 놀이에 대해서 '장기의 이론'은 가능하며, 장기의 이론은 장기 놀이에 대해서 **그 적용에서** 어떤 '정보'를 줄 수도 있다.[12] 이와 같이 수학적 명제들의 상이한 방식의 적용이 가능하다는 점에서 어떤 수학은 어떤 다른 수학에 **대한** 것이라고 말할 수도 있다.[13]

메타놀이 불가능성 논변(3)에 따르면, 가령 장기의 이론은 장기 놀이와 물리적인 장기 말의 움직임만 없다는 것이 차이일 뿐, 장기 놀이를 그대로 따라 한다는 점에서 메타놀이가 아니고 그저 하나의 놀이에 불과하다. 그러나 과연 그러한가? 앞에서 지적했듯이, 자와 컴퍼스로 하는 작도놀이에 대해서, 이 놀이에서는 그 규칙을 따를 때 각3등분 작도가 불가능하다는 것이 현대 대수학에서 증명되었다. 우리는 현대 대수학을 '작도놀이의 이론'으로 볼 수 있다. 이 경우에 각3등분 작도가 불가능하다는 증명은 단순히 작도 놀이의 동작을 따라 하는 것이 **아니다.** 작도 놀이의 어떤 동작을 수행하더라도 '각3등분 작도 불가능'이라는 동작은 구성될 수 없을 것이기 때문이다. 따라서 장기의 이론 또한 장기 놀이를 그대로 따라 하는 것이 아닐 수 있으며, 메타놀이가 존재하지 않는다는 결론은 나오지 않는다.

마지막으로 물음 유의미성 조건 논변(4)에 따르면, 한 물음은 그

---

12) 물론 이때의 '정보'는 실제 세계의 사실이나 '정보'와는 성격이 다르다. 그렇다고 해서 비트겐슈타인이 지적하듯이, 이 경우에 수학적 명제는 '수학적 정보'를 지니고 있다고 말하는 것은 오도적일 것이다.(참고: LFM, p. 281). 우리는 다만 이 경우에 그 적용의 방식이 상이한 경우들이 있음을 주목할 수 있다. 그리하여 우리는 장기 이론에서 "그것에 대응하는 실재를" 그것이 아니라 "그것의 적용에서" 찾게 될 것이다.(참고: LFM, p. 251.)

13) 비트겐슈타인은 『수학의 기초에 관한 강의』에서 '장기의 이론'을 인정하고 있으며(참고: LFM, pp. 149-150.), 또 수학이 수학 자체로 적용되는 경우를 언급하고 있다.(참고: LFM, pp. 47-48.)

대답 방법이나 절차가 주어져 있을 때에만 유의미하며, 마찬가지로 어떤 것을 찾는 행위는 찾는 방법이나 절차가 주어져 있을 때에만 유의미하다. 그런데 우리의 계산체계에서는 모순이 있는지를 찾는 방법은 존재하지 않는다. 따라서 무모순성 물음은 무의미하고, 무모순성 증명은 존재하지 않으며(필요하지 않으며), 숨어 있는 모순에 대해 이야기하는 것은 무의미하다.

이 논변에서 가장 중요한 것은 "우리의 계산체계에서는 모순이 있는지를 찾는 방법은 존재하지 않는다"는 주장이다. 그러한 방법이 존재하지 않는다고 보았기 때문에, 무모순성 증명은 무의미하다는 결론이 나온 것이다. **그러나 과연 우리는 그러한 방법이 존재하지 않는다는 것을 어떻게 알 수 있는가?** 작도 놀이에서 각3등분 작도가 불가능하며 그러한 작도방법이 없다는 것은 현대 대수학에서의 증명을 통하여 알려진 것이다. 그렇다면 우리의 계산체계에서 모순을 찾는 방법이 없다는 것을 우리는 그러한 (괴델의 불완전성 정리나 겐첸의 무모순성 증명과 같은) 증명이 주어지기 **전에** 알 수 있는가?

또한 비트겐슈타인은 모순을 찾는 방법이 없기 때문에 무모순성 물음은 무의미하다고, 모순에 대해 이야기하는 것이 무의미하다고 말한다. 그러나 자와 컴퍼스로 작도하는 상황에서, 특히 현대 대수학의 증명이 주어지기 이전 상황에서, 사람들이 각 3등분에 대해서 이야기하는 것은 무의미한가? 각3등분 작도 불가능성이 증명되기 이전의 상황에서 "각3등분 작도"에 대해서 말하는 것이 의미가 있는지 여부는 결정되지 않는다. 오히려 그 작도불가능성이 증명된 **이후에** "각3등분 작도"에 대해 이야기하는 것이 무의미하다는 것이 판명된다. 그렇다면 이는 무모순성 증명의 경우에도 마찬가지 아닐까? 즉 무모순성 증명이 주어지기 전에는 모순을 찾는 것에 대해서 무의미하다고 말할 수 없는 것 아닌가?

7. 맺는 말: 비트겐슈타인의 수학철학

지금까지 우리는 중기(특히 1929년-1934년) 비트겐슈타인이 힐베르트의 형식주의를 부분적으로 수용하면서 비판하였다는 것, 힐베르트 프로그램에 대해서는 메타수학과 무모순성 증명이 존재하지 않는다는 과격한 주장을 하였다는 것, 또 그러한 주장의 문제점들을 살펴보았다.

이제 1939년 이후의 비트겐슈타인이 더 이상 메타수학과 무모순성 증명이 존재하지 않는다는 과격한 주장을 하지 않는다는 점을 확인하기로 하자. 무모순성 물음이 무의미하며 무모순성 증명이 존재하지 않는다는 비트겐슈타인의 주장의 핵심 근거는 우리의 계산체계에는 모순을 찾는 방법이 존재하지 않는다는 것이었다. 비트겐슈타인은 바로 이 핵심 주장을 포기하는데, 이는 다음의 언급을 통해 알 수 있다.

> 만일 그러한 [모순을 발견하는] 어떤 기술도 없다면, 이는 아무런 문제가 되지 않는다. 그것은 **우리가** 그 기술을 얻어내지 못한 경우가 아니며, 단지 그 계산체계가 그런 것을 얻지 못했을 뿐이다. 만일 어떤 기술도 없다면, 우리는 숨어 있는 모순에 대해서 이야기하지 말아야 한다.(LFM, p. 210.)

> 그것[숨어 있는 모순]이 **알아차리지** 못하게 되는 한 그것은 숨어 있는 것인가? 그렇다면 그것이 숨어 있는 한, 나는 그것이 더할 나위 없이 좋다고 말한다. 그리고 그것이 공개되어 드러날 때 그것은 어떤 해도 끼칠 수 없다.(LFM, p. 219.)

이 인용문에서 알 수 있듯이, 비트겐슈타인은 계산체계에서 모순을 찾는 방법이 존재하지 않는다고 더 이상 주장하지 않는다. 그는 결코 "모순을 발견하는 어떤 기술이 존재하지 않는다"고 명시적으로 주장하지 **않으며**, 오히려 그러한 경우를 상정하는 약화된 주장만을

하고 있을 뿐이다. 우리가 계산체계에서 모순을 찾는 방법이 존재하지 않는다는 것을 확신할 수 있다면 우리는 이와 함께 '숨어있는 모순'이 존재하지 않는다는 것을 확신할 수 있다. 그런데 계산체계에서 모순을 찾는 방법이 존재하지 않는다는 것을 수학적으로 엄밀하게 보여주는 것은 다름 아닌 무모순성 증명이다. 따라서 무모순성 증명이 주어지기 전에 '숨어있는 모순'이 존재하는지를 묻는 것은 각3등분 작도 불가능성 증명이 주어지기 전에 각3등분 작도가 가능한지를 묻는 것과 같다. 즉 증명이 주어진 이후에 비로소 그것들은 무의미한 것으로 확정되고 우리의 언어사용에서 제외되지만, 그 이전에는 그 의미는 여전히 불투명한 것으로 남게 될 것이다. 더 나아가 비트겐슈타인은 1940년대에는 무모순성 증명의 가치와 의의를 어느 정도 인정하고 있다. 이는 다음의 언급으로부터도 알 수 있다.

> 무모순성의 증명은 우리에게 어떤 예측에 대한 근거들을 제공해 줌에 틀림없으며, 이것이 그 **실제적인 목적**이다. 이는 이 증명이 우리의 계산 기술의 물리학으로부터의 증명—따라서 응용 수학으로부터의 증명—이라는 점을 뜻하는 것이 아니라, 우리에게 가장 가까이 놓여 있는 적용과 바로 그 때문에 우리에게는 이 증명에 놓여 있는 적용이 예측이라는 점을 뜻한다. 그 예측은 "어떤 무질서도 **이 방식으로** 일어나지 않을 것이다"가 아니라 (왜냐하면 그것은 전혀 예측이 아니라 수학적 명제일 것이므로). "어떤 무질서도 일어나지 않을 것이다"이다.
>
> 나는 다음과 같이 말하고자 했다: 만일 무모순성의 증명이 이 예측에 대해 어떤 적확한 근거라면, 그것은 단지 우리를 **진정**시킬 수 있을 뿐이다.(RFM, 2부 86절.)

아마도 이렇게 비트겐슈타인이 이전의 그 과격한 주장을 철회하는 데에는 괴델의 불완전성 정리와 겐첸의 산술의 무모순성 증명이 크게 작용했을 것이다(그러나 내가 아는 한, 비트겐슈타인이 겐첸을 언급한 적은 없다). 이제 나는 비트겐슈타인이 자신의 그 과

격한 주장을 철회하면서 새롭게 제기하는 성숙한 수학철학의 단면을 묘사하면서 이 글을 맺고자 한다.

비트겐슈타인은 힐베르트의 형식주의의 기본적인 착상을 받아들임으로써 프레게의 의미 이론을 극복하였고 의미를 사용 또는 놀이의 규칙들로 파악하였으며, 수학을 우리 언어의 구문론과 관련짓는다. 또한 수학을 놀이의 관점에서, 더 나아가 실천의 관점에서 바라본다. ("언어 놀이의 관점에서 그것을 바라보자."(RFM, Ⅱ부 79절.) 그리고 그에게는 대부분의 수학의 본질은 "개념 형성"에 있다.(참조: RFM, Ⅲ부 30절) 그러나 이때의 개념 형성은 브라우어식으로 직관에 의한 구성을 뜻하는 것이 아니라, 우리 언어의 구문론과 규칙에 따른 개념 형성을 뜻한다. "수학은 우리 언어의 규칙들 안에서 움직인다."(Ⅰ부, 164절.) 그리고 이러한 개념 형성은 증명을 통해 이루어진다. "증명은 우리 언어의 문법을 바꾸고, 우리의 개념을 바꾼다. 증명은 새로운 연관들을 만들고, 이 연관들의 개념을 창조한다."(RFM, Ⅱ부, 31절.) "수학은 우리에게 새로운 방식으로 개념들을 가지고 조작하는 것을 가르친다. 그리하여 우리는 수학이 우리의 개념적 작업을 변화시킨다고 말할 수 있다."(RFM, Ⅴ부 38절.) 따라서 수학자는 발명가이지 발견가가 아니다.(RFM, Ⅰ부, 167절.) 이를 통해 비트겐슈타인은 수학과 수학철학을 날카롭게 구분하며, 철학자는 수학자에게 개입 또는 참견해서는 안 된다는 수학철학의 지침에 도달한다.

> 철학은 또한 수학도 있는 그대로 놓아둔다. 그리고 어떠한 수학적 발견도 철학을 촉진할 수 없다. "수리 논리학의 주된 문제"는 수리 논리학의 다른 모든 문제 각각과 마찬가지로 우리에게는 수학의 한 문제이다. (『철학적 탐구』, 124절.)

그리하여 그는 이러한 지침에 따라, 힐베르트의 프로그램, 괴델의 불완전성 정리 그리고 겐첸의 산술의 무모순성 증명에 대해서

그 **수학적** 의의를 결코 부정하지 않는다. 오히려 비트겐슈타인에게 가장 중요한 것은 모순과 무모순성 증명과 둘러싼 어떤 철학적 오해들과 불명료성이다.14)

> 나의 목표는 모순과 무모순성 증명에 대한 **태도**를 변경시키는 것이다. (이 증명이 중요하지 않은 어떤 것을 나에게 보여준다는 점을 보여 주는 것이 **아니다**. 어떻게 **그럴 수 있겠는가**! (RFM, Ⅱ부 82절.)15)

비트겐슈타인은 메타수학과 무모순성 증명이 존재하지 않는다는 과격한 주장은 철회했지만, 계산체계에서 한 모순이 발견되면 그 계산체계는 무효화되거나 파괴될 것이라는 "미신적인 공포"(WVC, p. 196.), 또는 "모순에 대한 수학자의 미신적인 공포와 숭배"(RFM, 부론 Ⅰ, 17절.)가 근거 없는 것이라는 주장은 여전히 유지하고 있다. 수학에서의 한 모순이 발견된다 하더라도 수백 년 동안 수학자들에 의해 확립되었던 모든 계산들이 모두 무효화되거나 더 이상 존재하지 않게 될 것이라는 우려는 "모순"과 "계산", 그리고 "수학"에 대한 오해에서 비롯된 것일 뿐이다.(WVC, p. 196.)

> '모순은 계산 체계를 폐기한다'—이 특수한 지위는 어디에서 유래하는가? 내가 믿기로는 조금만 공상을 해보면 그것은 틀림없이

---

14) 그리고 나는 이렇게 믿는데(이 점은 아무리 강조해도 지나치지 않을 것이다), 비트겐슈타인은 자신의 지침을 통하여 "무모순성 문제"를 수학적인 문제와 철학적인 문제로 날카롭게 구분하고 있다. 그리하여 그는 괴델의 불완전성 증명에 대해서 "나의 과제는 예컨대 괴델의 증명에 대해 말하는 것이 아니라, 그것의 옆을 지나가서 말하는 것이다"(RFM, Ⅴ부, 16절.)라고 말한다. 또한 생커의 "무모순성 문제"(the problem of consistency)와 기초 문제(the foundations problem)의 구분은 이러한 맥락에서 그 의의가 있다(참고: Shanker(1986), pp. 18-19.).

15) 이 인용문은 또한 무모순성 증명에 대한 중기 비트겐슈타인의 생각과 후기 생각이 상이하다는 것을 극명하게 보여주고 있다.

[그 기반이] 흔들릴 것이다.(RFM, Ⅴ부 12절.)[16]

비트겐슈타인은 설령 어떤 모순이 숨어 있다 할지라도 그것이 공개되어 드러나면 어떤 해를 끼칠 수도 없다고 주장한다. 모순은 신체의 질병과 같은 것이 아니며, 거짓 명제도 아니다. 그렇다면 만일 모순이 발견되면 어떻게 되는가? 비트겐슈타인의 대답은 이러하다. “만일 모순이 수학의 놀이의 규칙들 사이에서 일어난다면, 해결책을 발견하는 것은 세상에서 가장 쉬운 일이 될 것이다. 우리가 해야만 하는 것은 그 규칙들이 충돌되는 경우들에 관해 새로운 규정을 설정하는 것이고, 그러면 문제는 해결된다.”(WVC, p. 120.) 사실상 우리는 “0 ÷ 0”의 경우에도 그렇게 한다. 우리는 “0 ÷ 0”의 계산으로부터 모순이 발생하면 새로운 규정을 설정한다. 이 경우에 우리는 그러한 표현(“0 ÷ 0”) 자체를 거부한다. 이는 수학을 인간의 활동, 놀이, 실천의 관점에서 바라볼 때 나오는 귀결이며, 궁극적으로는 비트겐슈타인이 힐베르트와 바일에게 빚진 것이기도 하다.

---

16) 또한 RFM, Ⅱ부 77절, Ⅴ부 8-12절을 참조할 것.

참고문헌

박정일 (1999), 「힐베르트의 프로그램에 관하여 I」, 『철학』, 1999년 여름, 한국철학회, pp. 249-278.

박정일 (2000), 「유한주의와 철학적 해석」, 『논리연구』, 제4집, pp. 37-62.

Hilbert, D. (1922), "Neubegründung der Mathematik", in Hilbert (1935), pp. 157-177.

Hilbert, D. (1925), "On the Infinite", in van Heijenoort (1967), pp. 369-392.

Hilbert, D. (1927), "The foundations of Mathematics", in van Heijenoort (1967), pp. 464-479.

Hilbert, D. (1931), "Die Grundlegung der elementare Zahlenlehre", in Hilbert (1935), pp. 192-195.

Hilbert, D. (1935), *Gesammelte Abhandlungen*, reprinted, 1965, Chelsea Pb. Co., New York.

Shanker, S. G. (1986), ed. *Ludwig Wittgenstein: Critical Assessments*, vol.3, Croom Helm.

Shanker, S. G. (1986), "Introduction: The Portals of Discovery", In Shanker (1986), pp. 1-25.

Shanker, S. G. (1988), ed. *Gödel's Theorem in Focus*, Routledge, London & New York.

Shanker, S. G. (1988), "Wittgenstein's Remarks on the Significance of Gödel's Theorem", in Shanker(1988), pp. 155-256.

van Heijenoort, J. (1967), ed., *From Frege to Gödel: A Source Book in Mathematical Logic, 1879-1931*, Cambridge:

Harvard U. P.

Wittgenstein, L. (1922), (TLP), *Tractatus Logico-Philosophicus*, German-English, English trans. by C. K. Ogden and F. P. Ramsey, London: Routledge & Kegan Paul. (『논리-철학논고』, 이영철 옮김, 천지, 1991.)

Wittgenstein, L. (1953), (**PI**), *Philosophische Untersuchungen*, The Macmillan Company, New York. (『철학적 탐구』, 이영철 옮김, 서광사, 1994.)

Wittgenstein, L. (1956), (**RFM**), *Bemerkungen über die Grundlagen der Mathematik*, Basil Blackwell, Oxford. (『수학의 기초에 관한 고찰』, 박정일 옮김, 서광사, 1997.)

Wittgenstein, L. (1974), (**PG**), *Philosophical Grammar*, ed. Rush Rhees, Basil Blackwell.

Wittgenstein, L. (1975), (**PR**), *Philosophical Remarks*, ed. R. Rhees, trans., R. Hargreaves and R. White, Basil Blackwell.

Wittgenstein, L. (1976), (**LFM**), *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics Cambridge, 1939*, ed. by Cora Diamond, Cornell U.P. (『비트겐슈타인의 수학의 기초에 관한 강의』, 박정일 옮김, 올, 2010.)

Wittgenstein, L. (1979), (**WVC**), *Wittgenstein and the Vienna Circle*, ed. by Brian McGuinness, Basil Blackwell.

숙명여자대학교 교양교육원
Sookmyung Women’s University, General Education Institute
willsam@sookmyung.ac.kr

Wittgenstein on Hilbert's Program

Jeong-Il Park

As far as Hilbert's Program is concerned, there seems to be important differences in the development of Wittgenstein's thoughts. Wittgenstein's main claims on this theme in his middle period writings, such as *Wittgenstein and the Vienna Circle*, *Philosophical Remarks* and *Philosophical Grammar* seem to be different from the later writings such as *Wittgenstein's Lectures on the Foundations of Mathematics (Cambridge 1939)* and *Remarks on the Foundations of Mathematics*. To show that differences, I will first briefly survey Hilbert's program and his philosophy of mathematics, that is to say, formalism. Next, I will illuminate in what respects Wittgenstein was influenced by and criticized Hilbert's formalism. Surprisingly enough, Wittgenstein claims in his middle period that there is neither metamathematics nor proof of consistency. But later, he withdraws his such radical claims. Furthermore, we cannot find out any evidences, I think, that he maintained his formerly claims. I will illuminate why Wittgenstein does not raise such claims any more.

Key Words: Wittgenstein, Hilbert, Hilbert's Program, Formalism, Metamathematics, Proof of Consistency