

직관주의적 유형론에서의 진리개념*

정 인 교

【국문요약】 이 글의 목표는 직관주의적 유형론에서의 진리개념이 어떻게 이해될 수 있는지를 검토하고, 이에 의거하여 직관주의적이면서 객관적인 진리개념을 확보하는 문제에 있어서 프라위츠의 논증보다 진전된 논증을 제시하는 것이다. 이를 위해, 직관주의적 유형론에서의 명제, 유형 및 판단의 구분을 프레게의 판단이론과 비교하며 간략히 설명한 후, 직관주의적 유형론에서의 진리판단을 분석하고, 이에 의거해 증명의 존재의 확정성이 어떻게 이해될 수 있는지 밝힐 것이다. 또한 직관주의적 유형론에서 진리판단으로서의 존재판단이 어떻게 이해되어야 하는지, 특히 왜 그것이 존재양화명제가 될 수 없는지 그 이유를 밝히고, 존재판단을 생략적 판단으로 해석하는 한 견해를 비판할 것이다. 직관주의적 유형론에서의 진리개념에 관한 이 글에서의 분석은 증명의 존재의 확정성 문제와 증명의 존재의 비명제적 성격을 분명히 한 점에서 직관주의적이고 객관적인 진리개념에 대한 프라위츠의 규정보다 진전된 형태의 설명임을 밝히고, 이런 진리개념에 대한 주관적 진리개념의 옹호자들의 한 비판에 답할 것이다.

【주요어】 직관주의적 유형론, 직관주의적 진리개념, 증명의 존재, 마틴뢰프, 프라위츠

접수일자: 2013.09.05 심사 및 수정 완료일: 2013.10.03 게재확정일: 2013.10.07

* 본 연구는 2010학년도 고려대학교 문과대학 특별연구비에 의하여 수행되었음.
익명의 심사자들의 유익한 논평에 감사드립니다.

1. 들어가는 말

직관주의적으로 올바른 진리개념은 무엇인가? 어떤 수학적 진술이 참이라는 것은 직관주의적으로 무엇을 의미하는가? 이 질문에 대한 기존의 답변들은 진리와 인식 사이의 간격을 허용하는 정도에 따라 크게 세 부류로 나누어진다.¹⁾ 첫째는 그 간격을 전혀 허용하지 않는 입장으로, 이에 따르면, 어떤 수학적 진술이 참이라는 것은 그 진술에 대한 증명을 우리가 현실적으로 지니고 있다는 것이다. 어떤 진술에 대한 증명을 우리가 현실적으로 지니게 되는 것은 정신적 사건이고 정신적 사건은 시간 속에서 일어나므로, 이런 진리개념은 강하게 주관적인 동시에 시제를 지니고 있다. 이런 입장은 덤밋(M. Dummett)의 초창기 저술이나 다소 불분명하지만 브라우어(E. J. Brouwer) 및 헤이팅(A. Heyting)의 저술들에서 옹호된 것으로 여겨진다. 둘째는 수학적 진리와 인식간의 간격을 최소한으로 허용하는 입장으로, 이에 따르면, 어떤 수학적 진술이 참이라는 것은 그 진술에 대한 증명을 우리가 현실적으로 지니고 있거나 그 진술 혹은 그 진술의 부정을 증명하는 방법을 알고 있다는 것이다. 이 입장은 어떤 수학적 진술 A에 대해, 우리가 아는 어떤 방법이 A의 증명을 산출하거나 $\neg A$ 의 증명을 산출하는 결정절차라는 것을 우리가 알고 있으면, 그 방법을 적용한 결과를 우리가 모르는 경우에도 A가 참이거나 $\neg A$ 가 참이라는 것을 인정한다. 그러나 우리가 A의 결정절차를 알게 되는 것은 정신적 사건이므로, 이런 진리개념은 약하게 주관적이지만 시제를 지니고 있다. 이런 약하게 주관적인 진리개념은 덤밋에 의해 강력히 옹호되었다. 셋째는 진리와 인식간의 더 넓은 간격을 허용하는 입장으로, 이에 따르면, 수학적

1) 이 단락에서 간략히 언급된 세 입장들에 관한 보다 자세한 설명과 검토를 위해서는 정인교 (2013)를 볼 것.

진리는 인식가능성과 독립적이지는 않지만, 현실적 인식과는 독립적이라는 점에서 확정적이고 객관적이다. 이런 객관적인 진리개념은 프라우itz(D. Prawitz)에 의해 강력히 옹호되었다. 그에 따르면, 어떤 수학적 진술이 참이라는 것은 그 진술에 대한 증명이 무시제적이고 추상적인 의미에서 존재한다는 것이다. 특히 그는 덤밋의 비판에 맞서 이런 무시제적이고 추상적인 의미의 존재가 얼마든지 직관주의적으로 이해될 수 있다는 논지를 전개해 왔다.

직관주의 수학의 기초체계로 마틴뢰프(P. Martin-Löf)에 의해 제시된 직관주의적 유형론에서는 진리개념이 진리판단의 내용의 일부로서 대상언어에 도입된다.²⁾ 이 이론에서는 ‘명제 A가 참이다(A true)’는 진리판단은 ‘명제 A의 증명이 있다(Pf(A) exists)’는 존재판단과 같으며 통상적인 추론을 구성하는 단위가 된다. 마틴뢰프와 준홈(G. Sundholm)은 직관주의적 유형론의 철학적 기초에 관한 반성에 의거하여 객관적인 진리개념을 옹호해 왔다.³⁾ 그들의 진리개념은 외견상 프라우itz의 진리개념과 유사한 형태로 제시되지만, 이들의 입장들 간에는 적지 않은 차이가 있는 것으로 여겨졌으며, 그에 관한 문제도 쟁점이 되어왔다.⁴⁾

필자는 강하게 주관적인 진리개념과 약하게 주관적인 진리개념을 비판하고 객관적인 진리개념을 옹호하면서 프라우itz의 객관적 진리개념이 직관주의적으로 적합한 것이 되기 위해서는 다음과 같은 문제들이 해결되어야 한다고 지적한 바 있다.⁵⁾ 첫째, 어떤 수학적 진술의 증명의 존재여부가 우리의 현실적 인식과 독립적으로 확정적

2) 직관주의적 유형론에 대한 설명으로는 Martin-Löf (1984), 정인교 (2011a), (2011b)를 볼 것.

3) Martin-Löf (1987), (1991), (1994), (1996), (2013), Sundholm (1994a), (1994b), (2004) 등을 볼 것.

4) Prawitz (1998b), (1998c), (2012a), (2012b), Sundholm (1994b), Martin-Löf (1998) 등을 볼 것.

5) 정인교 (2013)을 볼 것.

이라면 그 확정성은 무엇에 기인하는가? 프라우츠는 그 확정성이 수학적 진술의 의미에 기인한다고 주장하였다. 이 주장은 훨씬 더 깊이 설명되고 정당화되어야 할 필요가 있다. 둘째는 증명의 무시 제적이고 추상적인 의미의 존재가 직관주의적 존재양화로 이해될 수 있는지의 문제이다. 필자는 직관주의적 유형론을 지지하는 기본적인 원칙들이 이 두 문제들에 깊은 시사를 지니고 있다고 생각한다. 이 글의 목표는 직관주의적 유형론에서의 진리개념이 어떻게 이해될 수 있는지를 검토하고, 이런 이해가 프라우츠의 객관적 진리개념에 관한 두 문제들에 대해 어떤 함축을 지니는지를 밝히는 것이다.

2절에서는 직관주의적 유형론에서의 진리개념을 이해하기 위해 필수적인 사항인 명제, 유형 및 판단의 구분을 특히 프레게의 판단 이론과 비교하며 간략히 설명할 것이다. 3절에서는 직관주의적 유형론에서의 진리판단을 분석하고, 이에 의거해 증명의 존재의 확정성이 어떻게 이해될 수 있는지 밝힐 것이다. 4절에서는 직관주의적 유형론에서 진리판단으로서의 존재판단이 어떻게 이해되어야 하는지, 특히 왜 그것이 존재양화명제가 될 수 없는지 그 이유를 밝히고, 존재판단을 생략적 판단으로 해석하는 한 견해를 비판할 것이다. 5절에서는 직관주의적 유형론에서의 진리개념에 관한 이 글에서의 분석이 프라우츠의 직관주의적이고 객관적인 진리개념을 보다 분명한 형태로 제시하는 한 방식임을 지적하고, 이런 진리개념에 대한 주관적 진리개념의 옹호자들의 한 비판에 답할 것이다.

2. 명제와 유형과 판단

직관주의적 유형론에서 진리개념이 도입되는 방식을 이해하기 위해서는 우선 명제와 유형의 구분 및 이들과 판단의 구분이 이해되

어야 한다.⁶⁾ 전통적으로 추론은 어떤 인식들로부터 어떤 인식으로의 이행을 수행하는 작업으로 여겨졌다. 따라서 전통적 의미에서 추론의 단위가 되는 것들은 인식 혹은 지식을 나타내는 것들이어야 한다. 전통적으로 판단은 인식행위에 해당하는 정신적 행위이며 주장은 그런 인식행위의 표현에 해당하는 것으로 여겨졌다. ('판단'이란 말은 그런 인식행위의 대상 혹은 산물을 의미하기도 한다.) 따라서 전통적 의미의 추론은 어떤 판단들로부터 어떤 판단으로의 이행에 해당하며, 직관주의적 유형론에서는 이 점을 그대로 수용한다.

추론이 판단 혹은 주장들로 이루어진다는 점은 프레게(G. Frege)와 러셀(B. Russell)에 이르기까지 명시적으로 수용되었다. 판단은 명제로부터 진리로의 이행에 해당한다는 프레게의 주장은, 판단은 어떤 명제가 참이라는 인식에 해당한다는 것으로 이해될 수 있을 것이다. 프레게는 판단이 판단가능내용, 즉, 그가 나중에 '생각(thought)'이라 부른 것과, 주장적 효력(assertoric force)으로 분석될 수 있다고 여겼다. 프레게의 가로선과 세로선은 이들을 명시적으로 나타내기 위한 기호이다. 프레게의 생각과 직관주의적 유형론의 명제를 대응시킨다면, 프레게는 모든 추론이 아래의 왼쪽에 나타난 형식을 지니는 것으로 여겼으며, 마틴뢰프는 모든 추론은 아니지만 많은 흥미로운 추론들이 아래의 오른쪽에 나타난 형식을 지니는 것으로 여겼다고 할 수 있다.⁷⁾

$$\frac{\frac{\vdash A_1, \dots, \vdash A_n}{\vdash B}}{\vdash B} \qquad \frac{A_1 \text{ true}, \dots, A_n \text{ true}}{B \text{ true}}$$

6) 이 절에서의 논의에 관한 보충을 위해서는 정인교 (2011a) 및 (2011b)를 볼 것.

7) 프레게가 고려하지 않은 자연언역체계에서와 같은 통상적 방식의 추론은 직관주의적 유형론에서 조건적 판단을 도입하여 다루어 질 수 있다.

여기서 ‘A true’는 ‘명제 A가 참이다’는 판단을 나타낸다. 주장적 효력 자체는 추론의 타당성에 영향을 미치지 않는다고 가정할 때, 어떤 판단이든 그것이 명제와 주장적 효력으로 완전히 분석될 수 있다면, 추론의 논리적 타당성은 추론을 구성하는 판단들에 포함된 명제들의 논리적 형식들에 의해 결정될 것이다. 즉 판단이 명제와 주장적 효력의 두 요소로 완전히 분석된다면, 추론의 논리적 타당성은 명제들 간의 논리적 귀결관계에 의해 결정된다. 따라서 러셀 이후 대부분의 논리체계에서는 주장적 효력을 명시적으로 나타내지 않게 되며, 추론의 논리적 타당성 대신 명제들 간의 논리적 귀결관계에 관한 문제가 논리학의 핵심과제로 여겨져 왔다.⁸⁾

마틴뢰프는 추론을 구성하는 단위들이 명제가 아니라 판단이라는 점에서는 프레게와 의견을 같이하지만, 명제의 본성 및 판단의 분석에 관해서는 의견을 달리한다. 명제의 본성과 동일성 조건에 관한 프레게의 견해가 어떤 것이었는지는 불분명하고 논란이 많지만, 그의 견해는 고전적 진리개념에 의거한 진리조건적 분석으로 발전되었다. 직관주의자들은 당연히 우리의 인식가능성과 독립적인 진리개념에 의존하는 명제개념을 수용할 수 없다. 수학적 명제에 국한할 때, 직관주의적으로 올바른 명제개념은 고전적인 진리조건이 아니라 증명조건에 의해 제시된다. 우리가 어떤 수학적 명제를 파악하기 위해서는 무엇이 그 명제의 표준적 증명으로 간주될 수 있는지를 알아야 한다. 따라서 직관주의적으로 수학적 명제를 정의하기 위해서는 무엇보다 그 명제의 표준적 증명이 어떻게 형성되는지를 규정해야 한다. ‘표준적(canonical)’이란 조건을 추가하는 이유는 어떤 명제든, 그 표준적 증명이 있다면, 그런 표준적 증명을 구성하는 방법들은 무한히 많고, 그런 표준적 증명을 구성하는 방법들

8) 프라우itz와 마틴뢰프 및 준흠 등은 여러 이유에서 이런 전환을 비판하고 귀결관계 보다 추론의 타당성에 관한 문제가 더 핵심적인 과제임을 강조해 왔다.

은 모두 그 명제의 증명들로 간주될 수 있지만, 주어진 명제를 파악하기 위해 그 명제의 표준적 증명을 얻는 모든 방법들을 알아야 하는 것은 아니기 때문이다.⁹⁾ 예컨대 페르마의 마지막 정리를 이해하는 사람은 그것의 표준적 증명이 어떤 것인지를 이해하는 사람이다. 페르마의 마지막 정리의 표준적 증명에 해당하는 구성은 x, y, z 가 양의 정수이고, n 이 2보다 큰 자연수라는 증명이 주어지면, 명제 $x^n + y^n = z^n$ 으로부터 모순을 도출하는 방법에 해당한다.¹⁰⁾ 이처럼 페르마의 마지막 정리 자체는 많은 사람들이 쉽게 이해할 수 있지만, 이에 대한 와일즈(A. Wiles)의 논증은 소수의 전문가들만 이해할 수 있다. 이는 물론 와일즈의 논증을 이해하기 위해 필요한 것들이 페르마의 마지막 정리를 이해하기 위해 필요한 것들을 넘어서기 때문이다. 그러나 와일즈의 논증이 직관주의적으로 페르마의 마지막 정리의 증명으로 간주될 수 있으려면, 와일즈의 논증이 그 정리의 표준적 증명을 얻는 방법에 해당해야 한다. 직관주의적으로 페르마의 마지막 정리의 내용은 곧 그 표준적 증명이 어떻게 형성되는지에 의해 규정되기 때문이다. 일반적으로 구성 a 가 명제 A 의 증명이라는 판단을 올바르게 하기 위해서는, a 가 A 의 표준적 증명을 얻는 방법이라는 것을 알아야 한다. 이를 알기 위해서는 명제 A 의 파악, 즉, 무엇이 A 의 표준적 증명으로 간주되는지에 대한 지식뿐 아니라, a 에 대한 이해가 추가적으로 요구된다. a 가 A 의 표준적 증명과 동일하지는 않지만 A 의 표준적 증명을 얻는 방법에 해당할 때, a 는 A 의 표준적 증명으로 환원되는 비표준적 증명이라고

9) 만약 우리가 어떤 수학적 명제를 이해하기 위해서는 그 명제의 표준적 증명을 얻는 모든 방법들을 알아야 한다고 요구한다면, 우리가 어떤 방법들을 아는지 우리는 안다는 가정 하에서, 모든 수학적 명제가 결정가능하다는 불합리한 귀결이 도출될 것이다.

10) 물론 $x^n + y^n = z^n$ 에 해당하는 명제를 파악하기 위해서는 이 명제의 표준적 증명이 x 를 n 번 곱한 수와 y 를 n 번 곱한 수의 합이 z 를 n 번 곱한 수와 같음을 보이는 계산에 해당한다는 점을 알아야 한다.

도 한다. 페르마의 마지막 정리와 와일즈의 논증의 사례에서 드러나듯이, 어떤 수학적 명제를 파악하기 위해서 임의의 구성이 그 명제의 증명인지 아닌지를 알아야 할 필요는 없으며, 무엇이 그 명제의 표준적 증명에 해당하는지를 아는 것으로 충분하다. 따라서 직관주의적으로 어떤 수학적 명제를 파악하기 위해서는 그 표준적 증명이 어떻게 형성되는지를 파악해야 한다. 아울러 명제의 증명은 대상(proof object)으로 간주되므로, 어떤 두 구성이 주어진 명제의 같은 표준적 증명으로 간주되기 위한 동일성 조건에 관한 파악을 필요로 하지만, 이는 대부분 자명한 사실에 해당한다.

직관주의적 유형론에서 명제와 집합은 동일하게 여겨진다. 즉, 명제는 그 표준적 증명들과 그들이 그 명제의 같은 표준적 증명이 되기 위한 조건을 규정함으로써 정의되듯이, 집합은 그 표준적 원소들과 그들이 그 집합의 같은 표준적 원소가 되기 위한 조건을 규정함으로써 정의된다. 명제는 파악될 수 있는 것, 즉 인식가능한 것이어야 한다. 직관주의적으로 명제를 파악하기 위해서는 어떤 구성들이 그 표준적 증명으로 간주될 수 있는지 완전히 파악되어야 한다. 그러기 위해서는 특정한 명제의 표준적 증명들은 모두 규칙에 의해 귀납적으로 완전히 규정될 수 있어야 한다. 그들 간의 동일성 조건도 마찬가지이다.¹¹⁾ 일차논리에서 나타내어지는 명제형식

11) 필자가 아는 한 마틴뢰프는 명제의 표준적 원소들은 규칙에 의해 완전히 귀납적으로 산출될 수 있어야 한다는 주장을 할 뿐, 그 이유를 설명하지는 않는다. 여기 제시된 인식론적인 이유는 필자의 불완전한 설명이다. 불완전한 측면은, 일반적으로 규칙에 의해 규정되지 않는 유형 및 일반 개념도 파악될 수 있는 것이지만, 명제가 그 표준적 증명들에 의해 규정된다는 논제는 더 강한 인식적 요구를 함축한다는 것에 대한 설명이 추가되어야 한다는 점이다. 필자의 설명이 옳다면, 이 점은 특히 명제, 증명대상 및 진리개념이 존재론적인 것이라고 주장하는 마틴뢰프의 나중 견해에 관한 해석 혹은 평가와 관련해 중요한 고려사항이 될 것이다. Martin-Löf (1996) 및 Prawitz (2012a)를 볼 것.

의 경우, 겐첸(G. Gentzen)의 자연연역 체계의 도입규칙들은 결론에 해당하는 형식의 복합명제들의 표준적 증명들을 규정하는 규칙들로 여겨질 수 있다. 그렇지만 어떤 명제의 표준적 증명들을 산출하는 모든 가능한 방법들을 산출하는 규칙, 즉, 그 명제의 모든 가능한 증명들을 완전히 산출하는 규칙은 기대할 수 없을 것이다. 예컨대 골드바흐의 추측에 해당하는 명제의 경우, 우리는 어떤 것이 그 명제의 표준적 증명에 해당하는 지 완전히 파악하고 있지만, 그런 표준적 증명을 산출하는 방법이 있는지조차 알지 못한다. 그렇지만 우리는 어떤 구성이 골드바흐의 추측의 증명으로 간주될 수 있기 위한 조건이 무엇인지는 안다. 즉 그것은 n 이 2보다 큰 짝수라는 증명이 주어질 때, 그 합이 n 과 같게 되는 두 소수를 산출하는 방법이어야 한다. 골드바흐의 추측의 증명은 그런 방법 혹은 그런 방법으로 환원되는 방법이다. 이처럼 A 가 명제 혹은 집합일 때, A 의 증명들 전체 ($Pf(A)$) 혹은 이와 동일한 A 의 원소들 전체 ($El(A)$)는 명제나 집합이 되지는 못하지만, ‘ x 는 A 의 증명(원소)이다’는 분명한 적용조건, 즉, ‘ x 는 A 의 표준적 증명(원소)로 환원된다’는 조건을 만족하는 대상들이며, ‘ x 와 y 는 A 의 같은 증명(원소)이다’는 동일성 조건도 ‘ x 와 y 는 A 의 같은 표준적 증명(원소)로 환원된다’는 것으로 여겨질 수 있다. 이처럼 특정한 적용조건과 동일성조건을 만족하는 대상들 전체를 유형(type) 혹은 범주(category)라 한다.¹²⁾ 예컨대 A 가 증명가능한 명제(집합)일 때, A 의 증명(원소)들 전체가 집합(명제)이 된다는 보장은 없지만 한 유형이 된다.

이제 판단에 관한 프레게와 마틴뢰프의 분석을 비교해 보자. 모든 판단이 명제와 주장적 효력으로 분석된다고 여긴 프레게에게 명

12) 다형(polymorphic)유형론의 맥락에서는 ‘명제(집합)’와 ‘유형’이 같은 의미로 쓰이기도 하지만, 보다 기본적인 단형(monomorphic)유형론에서는 ‘명제(집합)’와 ‘유형’은 구분되어 사용되고 후자는 ‘범주’라고 불리기도 한다. 참조: 정인교 (2011b).

제와 별도로 판단의 형식들을 구분하고 이들의 의미를 설명할 필요는 없었다. 그러나 직관주의적 유형론에서는 명제의 논리적 형식과는 별도로 판단의 형식들이 구분된다. 예컨대 $A \text{ prop}$ (A 는 명제이다), $a:\text{Pf}(A)$ (a 는 A 의 증명이다), $A \text{ true}$ (A 는 참이다), $a=b:\text{Pf}(A)$ (a 와 b 는 A 의 동등한 증명이다), $A=B$ (A 와 B 는 같은 명제이다) 등은 직관주의적 유형론에 도입된 판단(주장)형식들의 예이며, 이들의 의미는 인식적인 조건인 판단(주장)가능성 조건에 의해 설명된다. 즉 어떤 판단(주장)의 의미는 그 판단(주장)을 하기위해 알아야 할 것이 무엇인지에 의해 규정된다. 이는 판단행위는 인식행위라는 앞선 언급과 부합하는 동시에 검증주의적 의미론에 부합될 수 있는 의미설명이다.

마틴뢰프는 판단에 관한 프레게의 분석, 즉 판단이 판단가능한 내용에 해당하는 명제와 주장적 효력으로 완전히 분석될 수 있다는 입장을 명시적으로 비판하지는 않았다. 그렇지만 직관주의적 유형론에서는 명제의 형식뿐 아니라 판단의 형식이 구분되어야 하므로 판단에 관한 프레게의 분석이 그대로 수용되기는 힘들어 보인다. 이 점은 직관주의적 유형론에서의 판단에 관한 덤밋의 이해를 비판적으로 검토함으로써 부각될 수 있다. 덤밋은 ‘ $A \text{ true}$ ’라는 판단을 프레게의 ‘ $\vdash A$ ’와 같은 방식으로 이해한다.¹³⁾ 즉 ‘ $A \text{ true}$ ’라는 판단(주장)에서 판단(주장)된 내용은 A 에 해당하는 명제이고 ‘ true ’는 판단의 효력에 관한 (다소 오도적인) 표현으로 간주한다. 아울러 ‘ $a:\text{Pf}(A)$ ’는 ‘ a 에 의해, $\vdash A$ ’와 같이 주장된 내용은 A 이되, 주장 근거 a 를 명시적으로 나타낸 표현으로 간주한다. 덤밋의 해석은 판단에 관한 프레게의 분석 하에서 위의 두 판단 형식을 명제 형식으로 환원하여 수용할 수 있는 좋은 방안이지만, 다른 형식의 판단들에 이와 유사한 해석이 그대로 적용되기는 힘들어 보인다. 예컨대

¹³⁾ Dummett (1994)를 볼 것.

$A \text{ prop}$, $a=b:Pf(A)$ 와 같은 판단형식들에서 주장된 내용이 A 라고 할 수는 없으며, prop type (명제는 유형이다)는 판단은 특정한 명제를 그 판단내용으로 지니지 않는다.

자연스런 의문은 ‘판단의 내용, 즉 판단된 내용을 명제로 간주하지 않을 정당한 이유가 있는가?’라는 점이다. 위에 예든 판단들이 각각 ‘ A 는 명제이다’, ‘구성 a 와 b 는 명제 A 의 동등한 증명이다’ 및 ‘명제는 유형이다’는 일상적 표현으로 나타내어지는 내용을 지닌다면, 이런 일상적 표현의 내용들이 명제들로 간주되지 않아야 할 정당한 이유가 있는가? 더구나 같은 내용에 대해서 판단(주장)하거나 반박하고 질문하거나 답하고 추측하거나 가정하는 다양한 언어행위들이 가능해야 한다는 점을 염두에 둘 때, 이런 다양한 언어행위들은 그 효력(force)에서 구분되고 같은 판단내용과 같은 명제적 내용을 지닐 수 있다는 프레게 이래의 표준적인 분석을 수용하지 않으면 심각한 문제가 초래할 것이라는 우려가 있을 수 있다. 이 두 번째 우려에 대해 우선 거칠게 답하자면 다양한 언어행위들이 같은 내용을 지닐 수 있지만 그 내용들은 명제적 내용이 아닌 판단 내용일 수 있다는 것이고, 첫 번째 문제에 대해 우선 거칠게 답하자면 직관주의적 명제개념 및 직관주의적 증명개념에 의해 ‘...는 명제이다’, ‘...와 ...는 명제 ...의 동등한 증명이다’ 등에 해당하는 명제함수가 없다고 해야 할 이유가 있다는 것이다. 이 거친 답변들은 아래에서 조금 더 부연해 설명되겠지만, 이런 문제들에 대한 충분한 답변을 위해서는 판단과 명제에 관한 훨씬 더 깊은 분석을 필요로 한다.

3. 진리판단과 증명의 존재의 확정성

직관주의적 유형론에서, A 가 명제일 때 ‘ A 는 참이다’는 판단의

의미는 그 판단을 올바르게 할 수 있기 위한 조건에 의해 규정된다. 그 조건은 우리가 A의 어떤 증명 a를 구성하였다는 것이다. 따라서 어떤 명제 A에 대해 ‘A는 참이다.’는 판단은 어떤 구성 a에 대해 ‘a가 A의 증명이다.’는 판단에 의해 정당화되며, 이는 다음 규칙에 해당한다.

$$\frac{a:\text{Pf}(A)}{A \text{ true}}$$

앞서 언급한대로 이 추론규칙의 전제 a: Pf(A)는 명제가 아니라 ‘a는 A의 증명이다’에 해당하는 판단형식을 나타낸다. 그런 형식의 판단의 의미는, ‘그런 형식의 판단을 올바르게 하기 위해 우리가 알아야 할 것은 a가 명제 A의 표준적 증명으로 환원된다는 점, 즉, a가 A의 어떤 표준적 증명과 동등하다는 점이다’는 것에 의해 설명된다. 물론 위 규칙의 전제로부터 직접 추론될 수 있는 판단은 A의 증명이 있다(Pf(A) exists)는 존재판단이지만, 마틴뢰프는 A가 참이라는 판단(A true)은 A의 증명이 있다는 존재판단과 같은 판단으로 간주한다.

많은 직관주의자들은 명제 A가 참이라는 판단을 올바르게 하기 조건과 A의 증명이 있다는 판단을 올바르게 하기 위한 조건이 일치한다는 데에 동의할 것이다. 그러나 명제 A의 증명이 있다는 존재판단의 본성이 어떻게 이해되는지에 따라, 주관적이고 시제적인 진리개념이 옹호되기도 하고 객관적이고 무시제적인 진리개념이 옹호되기도 한다. 프라위츠와 마틴뢰프 및 준훔은 모두 객관적이고 무시제적인 진리개념을 옹호한다. 보다 명시적으로, 프라위츠는 어떤 수학적 명제가 참이기 위한 필요충분조건을 ‘그 명제의 증명이 무시제적이고 추상적인 의미에서 존재한다’는 것이라고 규정하였

다.¹⁴⁾ 마틴뢰프와 준훙은 어떤 수학적 명제가 참이라는 판단은 그 명제의 증명이 존재한다는 판단과 같은 판단이라고 여긴다. 그들은 증명을 여는 수학적 대상과 마찬가지로 추상적 대상으로 간주하고¹⁵⁾ 증명의 존재는 무시제적인 의미로 이해될 수 있다고 여기므로 그들의 수학적 진리개념은 일견 프라우츠의 수학적 진리개념과 같아 보인다. 그렇지만 이런 외견상의 일치에 의거해 직관주의적 유형론에 의거한 마틴뢰프와 준훙의 진리개념과 프라우츠의 진리개념이 다르지 않다는 결론을 내리는 것은 성급하다. 우선 앞서 언급한대로 직관주의적 유형론에서는 판단과 명제의 구분이 중요한 역할을 하기 때문이다. 예컨대 ‘어떤 수학적 명제가 참이기 위한 필요충분조건은 그 명제의 증명이 있다는 것이다’는 프라우츠의 주장, 혹은 더 간단히 ‘a가 A의 증명이면, A는 참이다’는 일상적 조건문이 직관주의적 유형론에서는 어떻게 이해될 수 있는지 밝혀져야 한다.¹⁶⁾ 이 조건문의 전건에 해당하는 ‘a가 A의 증명이다’를 직관주의적 유형론에서 직접적으로 나타내면 그것은 명제가 아니라 판단이 된다. 그러나 조건문의 전건은 주장의 효력을 지니지 못하므로, 조건문의 전건이 판단이 될 수는 없다. 보다 일반적으로, 논리적 연산자들은 명제나 명제함수들에 적용되어 (복합)명제를 산출하는 연산자이며, 이들이 판단에 적용될 수는 없다. 프레게의 논리적 연산자가 $\vdash A$ 에 적용될 수 없듯이, 직관주의적 유형론의 논리적 연산자가 ‘A true’나 ‘a; Pf(A)’와 같은 판단에 적용될 수는 없는 것이다.¹⁷⁾ 판단과 명제에 대한 직관주의적 유형론에서의 구분을 유지하

14) 예컨대 Prawitz (1994), (1998a) 및 정인교 (2013)을 볼 것.

15) 마틴뢰프는 명제의 증명과 판단의 증명을 구분하기 위해, 명제의 증명을 ‘증명대상(proof object)’이라 하고, 판단의 증명을 ‘입증(demonstration)’이라 한다. 마틴뢰프의 (후기) 견해에 따르면, 추상적 대상인 증명대상은 존재론적 개념이고, 입증은 인식적 개념이다.

16) Martin-Löf (2013)의 Appendix는 이와 유사하게 그의 이전 서술에 대해 제기될 수 있는 문제를 피하기 위해 추가된 것으로 여겨진다.

면서 이 문제를 해결하는 몇 가지 방법이 제안될 수 있다. 첫째, ‘a가 A의 증명이다’는 표현을 임의의 구성 a와 임의의 명제 A 간의 관계를 나타내는 표현으로 간주하면 이는 명제함수를 나타낼 수 없고 판단형식을 나타내는 것이지만, ‘와일즈의 구성은 페르마의 마지막 정리의 증명이다’는 표현과 같이 그 구체적인 사례들은 명제로 나타내어질 수 있음을 보이는 것이다. 이 방안은 다음 절에서 좀 더 자세히 언급될 것이다. 둘째, ‘a가 A의 증명이면, A는 참이다’는 일상적 조건문을 아예 명제적 내용을 지니는 것이 아니라 조건적 판단을 나타내는 것으로 여기는 방안이다. 셋째, 외견상 논리적으로 복합적인 명제와 유사하게 복합판단같이 보이는 표현을 판단에 관한, 즉 판단을 언급하는 판단으로 여기는 것이다.¹⁸⁾ 예컨대 ‘어떤 수학적 명제가 참이기 위한 필요충분조건은 그 명제의 증명이 있다는 것이다’와 같은 표현은 다음과 같은 판단에 관한 판단(보다 구체적으로 판단의 구성요소에 관한 양화를 포함하는 판단)으로 여겨질 수 있을 것이다. 임의의 명제 A에 대해 ‘A가 참이다’라고 판단하는 것은 어떤 구성 a에 대해 ‘a가 A의 증명이다’라고 판단하는 것과 같다.

그런데 여기서의 판단은 실제 수행된 판단으로 해석될 수도 있고, 가능한 판단으로 해석될 수도 있다. 이 점이 중요한 것은 이 해석들이 각기 다른 진리개념을 산출하기 때문이다. 이 점을 보다 분명히 하기 위해 마틴뢰프가 나중에 구분한 ‘판단’의 세 의미를 고려해 보자. 우선 옳든 그르든 어떤 판단이 가능하기 위해서는 그

17) 여기서 언급된 문제는 전건에 해당하는 ‘a는 A의 증명이다’는 내용과 후건에 해당하는 ‘A는 참이다’는 내용의 특이성 때문에 생기는 문제이지, 일반적인 문제는 아니다. 즉 다른 통상적인 조건문을 비롯한 논리적 복합문은 직관주의적 유형론에서도 명제를 나타내는 것으로 취급된다.

18) 이와 유사한 해석은 Dummett (1994)에 나타난다. 다음 단락에서 언급될 판단의 세 구분을 고려하면 마틴뢰프도 이런 방식의 해석에 반대할 이유가 없을 것으로 여겨진다.

판단을 하기위해 알아야 할 것이 무엇인지가 규정되어야 한다. ‘A가 참이다’, 즉 ‘A의 증명이 있다’는 판단의 경우, A가 어떤 명제인가 하는 점이 규정되기만 하면, 즉 어떤 것이 A의 표준적 증명인지가 규정되기만 하면, 옳든 그르든 ‘A가 참이다’는 판단이 가능하다. 이런 의미에서 마틴뢰프는 A가 명제인 경우, ‘A는 참이다’는 논리적으로 가능한 판단이라고 한다. 여기서 ‘논리적으로 가능한(logically possible)’은 그 통상적인 의미와는 상당히 다른 의미를 지니며¹⁹⁾ 아마 ‘유의미한’이란 표현을 쓰는 것이 마틴뢰프의 의도에 더 부합할 수도 있을 것이다. 예컨대 마틴뢰프의 용어를 따르면, \perp 은, 어떠한 것도 그 표준적 증명이 아니라는 규정에 의해, 어떤 것이 그 표준적 증명으로 간주되는지 규정되었기 때문에, 명제이고, ‘ \perp 은 참이다’는 논리적으로 가능한 판단이 된다. 아울러 마틴뢰프는 실제로 내려진 판단을 ‘현실적(actual)’ 판단이라고 하고, 내려질 수 있는 판단을 ‘실제로 가능한(really possible)’ 혹은 ‘잠재적(potential)’ 판단이라고 한다. 여기서 내려질 수 있는 판단이란 그 판단내용이 지식의 대상이 될 수 있는 것, 즉 알려질 수 있는 것을 의미한다. 따라서 ‘ \perp 은 참이다’는 논리적으로 가능하지만 실제로 가능한 판단은 아니다. 마틴뢰프는 판단(행위)에 관한 이 세 구분을 진리개념과 (행위의) 대상에도 적용한다.

A가 현실적으로 참(actually true)이라고 말하는 것은 A가 참이라는 판단이 현실적이라는 말과, (즉 그 판단이 현실적으로 수행되었다는 말과) 같다.

A가 잠재적으로 참(potentially true)이라고 말하는 것은 A가 참이라는 판단이 잠재적이라는 (즉 실제로 가능하다는) 말과 같다.

A가 명제이기만 하면, A가 그냥 참(true simpliciter)이라는 판단은 논리적으로 가능하다.²⁰⁾

19) 마틴뢰프에 의하면 칸트와 스킵투스가 ‘논리적으로 가능한’이란 표현을 그와 유사한 의미로 사용했다. Martin-Löf (1991), p. 144.

마틴뢰프의 용어를 따르면, ‘A가 그냥 참이다’는 말은 ‘A는 명제이다’는 말과 다를 바가 없어 보인다. 반면 ‘A가 현실적으로 참이다’는 말은 ‘A의 증명이 현실적으로 있다’는 말로 나타낼 수 있을 것이고 이는 우리가 A의 증명을 현실적으로 알고 있다는 것을 나타낸다고 할 수 있을 것이다. 마찬가지로 ‘A가 잠재적으로 참이다’는 말은 ‘A의 증명이 잠재적으로 있다’는 말로 나타낼 수 있을 것이며, 마틴뢰프는 실제로 그런 표현을 사용한다.

현실적 진리개념과 잠재적 진리개념은 각각 주관적 진리개념과 객관적 진리개념에 해당하는 것으로 여겨질 수 있다. A가 현실적으로 참이라는 말은 A의 증명이 현실적으로 있다는 말, 즉 특정한 구성 a에 대해 a가 A의 증명이라는 판단을 우리가 내렸다는 말이고 이는 시간 속에서 일어난 우리의 정신적 사건이다. 따라서 현실적 진리개념은 우리의 현실적 인식에 의존하는 주관적이고 시제적인 진리개념이다. 마틴뢰프는 명시적으로 지적하지 않았지만, 준흠은 주관적이고 시제적인 진리개념이 직관주의적으로 부적합하다는 논지를 제시하며,²¹⁾ 그들은 모두 수학적 명제 A가 참이라는 것을 A의 증명이 잠재적으로 존재한다는 것으로 규정한다. 즉 마틴뢰프와 준흠에 의하면 직관주의적으로 올바른 진리개념은 잠재적 진리개념에 해당한다.²²⁾ 덤밋은 잠재적 존재가 어떻게 직관주의적으로 이해될 수 있을지 회의적이다. 그의 비판은 기본적으로 프라우츠의 객관적 진리개념에 대한 비판과 같다. 그의 비판은 다른 곳에서 검토되었기 때문에, 여기서는 덤밋의 비판의 요지를 간략히 언급한다. 그것은 ‘현실적으로 구성되지 않은 증명의 존재가 어떤 의미에서 확정적인(determinate) 것으로 여겨질 수 있는가?’라는 문제이다. 덤

20) Martin-Löf (1991), p. 144.

21) 예컨대 Sundholm (1994a)를 볼 것.

22) 프라우츠도 그의 ‘무시제적이고 추상적인 의미의 존재’를 마틴뢰프의 용어를 빌어 ‘잠재적 존재’로 표현한다.

밋은 증명의 잠재적 존재가 증명의 현실적 구성과는 독립적으로 확정적이라면, 이에 의거한 진리개념은 고전적인 진리개념과 구분되지 않거나 비일관적이 된다는 비판을 제기하였다.²³⁾ 덤밋의 비판에 대해, 프라우츠는 증명의 잠재적 존재가 직관주의적으로 이해될 수 있는 개념이며, 증명의 잠재적 존재가 함축하는 확정성은 의미에 기인한다는 다소 막연한 주장을 하였다.²⁴⁾

이제 프라우츠의 주장은 마틴뢰프와 준흠의 입장에서 다음과 같이 강화될 수 있을 것이다. 마틴뢰프에 따르면 ‘ a 는 A 의 증명이다 ($a: Pf(A)$)’는 형식의 판단은 a 와 A 의 의미에 의해 그 판단이 옳은 판단인지 여부가 결정될 수 있다. A 의 의미에 의해 어떤 구성이 그 표준적 증명에 해당하는 지가 주어지고, a 가 직관주의적으로 그 의미가 설명되는 표현들에 의해 나타내어진 구성에 해당하는 한, a 가 A 의 표준적 증명으로 환원가능한지 여부는 결정가능한 문제인 것이다.²⁵⁾ 이런 이유에서 마틴뢰프는 그런 형식의 판단들을 분석판단이라고 한다.²⁶⁾ 직관주의적 유형론에 의거한 마틴뢰프와 준흠의 입장에서는, 임의의 구성과 명제가 주어졌을 때 그 구성이 그 명제의 증명인지 아닌지에 대한 판단은 그 구성과 명제의 본성, 즉, 그 구성과 명제를 표현하는 기호들의 의미들에 의해 결정된다는 점에서, 어떤 구성이 주어진 명제의 증명인지 아닌지 여부는 우리의 현실적 지식과는 독립적으로 확정적인 문제라고 할 수 있을 것이다.

그러나 이 확정성은 구성과 명제 간에 성립하는 관계가 증명관계인지 여부에 대한 확정성이다. 이로부터 증명의 잠재적 존재에

23) Dummett (1994) 및 정인교 (2013)를 볼 것.

24) 정인교 (2013) 및 거기 언급된 참고문헌을 볼 것.

25) 커리-하워드 동형 (Curry-Howard Isomorphism)의 한 버전을 따라, 명제를 프로그램 문제로, 증명을 프로그램으로 간주하면, 이런 결정 절차는 전산학의 프로그램 검증(program verification)절차에 해당한다. Martin-Löf (1994).

26) Martin-Löf (1994) 및 정인교 (2011b)를 볼 것.

대한 확정성이 직접적으로 따라 나온다고 할 수는 없다. 특히 증명의 잠재적 존재가 우리의 현실적 인식과 독립적으로 확정적이라는 말이, 어떤 명제에 대해서든 ‘그 명제의 증명이 (잠재적으로) 있다는 판단은 옳거나 옳지 않다’는 주장을 정당화하는 것으로 여겨져서는 안 된다. 이는, 덤밋이 유사하게 지적했듯이,²⁷⁾ 직관주의적으로 ‘어떤 명제의 증명이 있다는 판단이 옳지 않다’는²⁸⁾ 주장을 정당하게 할 수 있다는 것으로부터 ‘그 명제의 부정에 대한 증명이 있다는 판단이 옳다’는 주장을 정당하게 할 수 있다는 것이 따라 나오는 것으로 여겨지기 때문에, 어떤 명제에 대해서든 ‘그 명제의 증명이 있다는 판단은 옳거나 옳지 않다’란 주장을 정당하게 할 수 있다면 이는 곧 이가원리와 배중률을 받아들이는 셈이 되기 때문이다. 한편 직관주의적 진리개념이 우리의 인식가능성과 독립적일 수는 없다는 점을 염두에 둘 때, 어떤 명제의 증명이 잠재적으로 존재하는 경우 그 증명은 원칙적으로 인식될 수 있는 것이어야 한다. 따라서 증명의 잠재적 존재는, 어떤 명제든 그 명제의 증명이 (잠재적으로) 있는 경우 이는 인식가능성과는 독립적이 아니지만 우리의 현실적 인식과는 독립적이며, 이로부터 어떤 명제든 그 명제나 그 부정의 증명이 있다는 판단이 정당화되지 않는 의미의 확정성을 지녀야 한다. 직관주의적 유형론의 존재판단이 그런 확정성을 지녔다는 논제는 다음과 같은 논거에 의해 지지될 수 있다.

우선 앞서 지적한대로 $a: Pf(A)$ 는 A만의 의미에 의해 결정되는 것이 아니라, a와 A의 의미에 의해 결정되는 판단이라는 점에 유

27) Dummett (1998) 및 정인교 (2013)을 볼 것.

28) 앞서 언급한 이유에서, 부정연산자가 판단에 적용될 수는 없으므로, 존재판단은 있어도 존재판단의 부정, 예컨대 ‘명제 A의 증명이 존재하지 않는다’는 판단은 있을 수 없다. 후자는 본문에 언급된 대로 ‘A의 증명이 존재한다는 판단이 옳지 않다’는 판단이나 ‘¬A의 증명이 존재한다’는 판단으로 이해되어야 한다.

의할 필요가 있다. 명제 A를 파악하기 위해서는 무엇이 A의 표준적 증명으로 간주되는지를 파악하는 것으로 충분하며, 이로부터 A의 표준적 증명이 있는지, 즉 A의 표준적 증명을 산출하는 방법이 있는지에 관한 지식이 보장되지는 않는다. 앞서 든 예처럼, 와일즈의 논증이 페르마의 마지막 정리의 표준적 증명을 산출하는 방법에 해당한다면 - 마틴뢰프를 따르면 와일즈의 논증은 그 경우에만 페르마의 마지막 정리의 증명이 된다 - 이 사실은 페르마의 마지막 정리의 의미와 와일즈의 논증의 의미에 의해 결정된다. 와일즈의 논증에 대한 이해는 페르마의 마지막 정리에 해당하는 명제를 파악하기 위해 필요한 것이 아니지만, 그의 논증이 페르마의 마지막 정리의 증명이라는 판단을 하기 위해서는 필수적인 것이다. A가 참이라는 (잠재적) 판단 (A true), 즉 A의 증명이 있다는 (잠재적) 판단 ($Pf(A)$ exists)을 정당하게 하기 위해서는, 특정한 구성 a에 대해 a가 A의 증명이라는 (잠재적) 판단 ($a: Pf(A)$)을 정당하게 할 수 있어야 하고, 후자가 가능한 경우 이는 a와 A의 의미에 의해 결정된다는 의미에서 증명의 (잠재적) 존재는 확정적이라고 할 수 있다. 이런 의미의 확정성은 우리가 지금 현실적으로 사용하는 언어에 의해 a와 A가 규정되었을 경우뿐 아니라, 우리가 지금 사용하지 않지만 앞으로 사용할 수도 있는 언어에 의해 a와 A가 규정된 경우에도 a가 A의 증명이라는 판단의 옳고 그름이 그 의미에 의해 결정된다는 것을 요구한다는 점에서, 프라우츠가 의도한 확정성보다 더 강한 의미일 수 있다. 증명의 잠재적 존재의 확정성은 이런 강한 의미의 확정성을 요구하는 것으로 여겨진다.

그러나 이로부터 임의의 명제 A에 대해 그 증명이 있다는 존재 판단이 결정가능하다는 것이 따라 나오지는 않는다. 이는 우리가 A의 표준적 증명을 얻는 모든 가능한 방법들을 규칙에 의해 완전히 규정할 수 없기 때문이다. 이는 곧 임의의 (그 증명이 잠재적으로

존재하는) 명제 A에 대해 그 증명들 전체 ($Pf(A)$)가 유형일 뿐 명제 혹은 집합이 아닌 이유와 같다.²⁹⁾ 앞서 언급한 의미에서 명제 A의 증명이 (잠재적으로) 있다면, 이는 의미에 의해 확정적인 문제이지만, 표준적 증명을 얻는 모든 가능한 방법들을 규칙에 의해 완전히 제시할 수 없는 한, 골드바흐의 추측과 같은 미결정 명제 A에 대해, A나 $\neg A$ 의 증명이 (잠재적으로) 있다고 하거나, A의 증명이 (잠재적으로) 있거나 없다고 하는 것에 해당하는 판단을 정당하게 내릴 수 없다. 우리가 사용할 수 있는 언어, 우리가 파악할 수 있는 개념, 우리가 생각할 수 있는 방법들 전체를 미리 어떤 규칙에 의해 완전히 규정할 수는 없으므로, A의 증명이 (잠재적으로) 존재한다는 판단, 즉 A의 표준적 증명을 산출하는 방법이 (잠재적으로) 존재한다는 판단은 결정가능하지 않으며, 임의의 명제의 증명의 잠재적 존재여부가 이런 의미에서 확정적인 것은 아니다.

4. 증명의 존재와 존재양화

프라위츠와 같이 임의의 수학적 명제 A에 대해 A가 참이기 위한 조건을 A의 증명이 (잠재적으로) 존재한다는 것으로 간주하는 직관주의적 진리개념의 한 문제는 ‘A의 증명이 (잠재적으로) 존재한다’는 존재진술의 성격을 분명히 밝히는 일이다. 임의의 수학적 명제 A의 증명의 후보에 해당하는 구성들을 미리 제약할 수는 없으므로, 이 진술은 일견 모든 구성들 중에서 A의 증명에 해당하는 구성이 있다는 식으로 이해되어야 할 것으로 보인다. 그렇다면 여기서의 존재진술은 명제를 나타내는 존재양화로 여겨질 수는 없

²⁹⁾ 물론 A가 증명가능하지 않은 명제인 경우, 즉, A의 증명이 잠재적으로 존재하지 않는 경우 $Pf(A)$ 는 $Pf(\perp)$ 와 같이 공집합에 해당한다. 여기서의 논의는 임의의 명제 A에 대해 $Pf(A)$ 가 공집합인지 아닌지를 결정하는 규칙이 없다는 점을 보인다.

다.³⁰⁾ 직관주의적 유형론에서는 이 점을 보다 분명히 드러내고 그 이유를 설명할 수 있다. 이는 마틴뢰프의 다음과 같은 주장을 보다 깊이 검토함으로써 드러날 것이다.

마틴뢰프는 ‘수학적 명제 A의 증명이 (잠재적으로) 존재할 경우, A는 참이다’는 그의 진리개념의 설명에서 전건의 ‘존재’는 직관주의적 양화사에 의해 표현될 수 없다는 점은 명백하며, A의 증명이 존재한다고 할 때의 존재는 ‘A의 증명’이라는 일반 개념의 존재와 같은 의미로 이해되어야 한다고 주장한다.³¹⁾ 그의 주장은 어떻게 이해되어야 하는가?

직관주의적 유형론에서 존재양화사는 그 도메인에 해당하는 특정한 집합과 그 집합을 정의역으로 하는 명제함수에 적용되어 명제(함수)를 산출하는 연산자이다.³²⁾ 앞서 직관주의적 유형론에서의 ‘x는 y의 증명이다’는 관계는, 명제가 아닌 판단을 산출한다는 점에서, 명제함수로 여겨질 수 없다는 점을 지적하였다. 어떤 판단이든 그것은 판단내용에 해당하는 명제적 요소와 주장적 효력의 요소로 남김없이 분석될 수 있다고 여긴다면, 이 점은 이해되기 힘들다. ‘x는 y의 증명이다’는 표현이 임의의 구성과 명제에 적용되어 명제를 산출하는 표현이라는 주장을 수용하지 않아야 하는 이유가 있는가? 어떤 구성 a와 명제 A에 대해 a가 A의 증명이라는 판단을 (a: Pf(A)에 대한 덤뮈의 해석과는 달리) a가 A의 증명이라는 명제

30) BHK 해석으로 표현되는 직관주의 논리의 표준적 의미론을 분명히 하려는 작업, 특히 크라이슬(G. Kreisel)과 굿만(N. Goodman) 등의 작업과 관련하여, 구성들 전체에 대한 양화문장이 지니는 문제에 관해서는 Weinstein (1983)을 볼 것.

31) Martin-Löf (1991), p. 143.

32) 직관주의적 유형론에서 명제는 집합과 같으므로, 명제함수는 집합족(family of sets)과 같은 것으로 여겨질 수 있다. 존재양화는 집합 A와 A의 원소 x에 적용되어 집합을 산출하는 집합족 B의 구분된 합(disjoint union) $\Sigma(A, B)$ (혹은 $(\exists x \in A)B(x)$)에 해당한다. 정인교 (2011a) 참조.

를 주장하는 것으로 여길 수 없는 이유가 무엇인가?

준흠은 ‘a는 A의 증명이다’는 표현을 명제를 나타내는 것으로 간주할 수 없는 가장 중요한 이유로, 이를 명제의 표현으로 간주하면 무한퇴행에 빠진다는 점을 든다.³³⁾ 이는 진리대응설의 무한퇴행과 유사한 것으로 다음과 같이 설명될 수 있을 것이다. ‘a가 A의 증명이다’에 해당하는 명제를 규정하려면 그 표준적 증명이 어떻게 형성되는 지 규정해야 하는데, 그렇다면, ‘b는 a가 A의 증명이라는 명제의 증명이다’는 표현을 명제로 간주하지 않을 이유가 없고, 그러기 위해서는 그 명제의 표준적 증명을 규정해야 한다. 이 절차는 명백히 무한퇴행을 낳는다.

그러나 이 이유는 ‘a는 A의 증명이다’의 의도된 해석이 명제적 내용을 나타내지 않는다는 점을 드러내기에 충분할지 모르나, 그 불가피한 이유로 여기기에는 다소 의문이 있을 수 있다. 필요하다면, 예컨대 ‘와일즈의 논증은 페르마의 마지막 정리의 증명이다’란 표현이 명제를 나타내는 것으로 이해될 수 있을 것 같기 때문이다. 직관주의적으로, 이 문장의 의미를 파악한다는 것은 어떤 구성이 와일즈의 논증을 페르마의 마지막 정리의 표준적 증명으로 환원하는 방법에 해당하는지를 파악하는 것에 해당한다고 할 수 있을 것이다.³⁴⁾ 그렇다면 그 명제의 표준적 증명은 와일즈의 구성을 페르마의 마지막 정리의 표준적 증명으로 환원하는 방법에 해당할 것이다. 직관주의적 유형론에 따르면 페르마의 마지막 정리의 내용에 관한 우리의 이해는 곧 어떤 구성이 그 정리의 표준적 증명에 해

33) Sundholm (1994a), (1994b), (2004).

34) 페르마의 마지막 정리와 와일즈의 논증을 이해하지 못하더라도 ‘페르마의 마지막 정리’라는 표현과 ‘와일즈의 논증’이라는 표현은 이해할 수 있다. 필자의 논의를 위해서는 ‘와일즈의 논증은 페르마의 마지막 정리의 증명이다’는 문장은 ‘와일즈의 논증’과 ‘페르마의 마지막 정리’라는 표현대신 와일즈의 논증과 페르마의 마지막 정리의 표준적인 서술들로 대치된 매우 긴 문장을 축약한 것으로 여겨져야 한다.

당하는지에 관한 지식에 해당하며, 와일즈의 구성이 직관주의적으로 이해될 수 있는 표현들에 의해 주어졌다고 가정할 때, 와일즈의 구성이 페르마의 마지막 정리에 대한 증명에 해당하는 지에 대한 검증은 곧 와일즈의 구성이 페르마의 마지막 정리의 표준적 증명으로 환원가능한지 여부를 확인하는 (결정가능한) 절차에 해당할 것이다. 따라서 필요하다면 ‘a는 A의 증명이다’란 형식의 적절한, 즉 직관주의적으로 이해될 수 있는 언어에서 표현된, 구체적인 사례에 대해서는 그것이 명제를 표현하는 것으로 여길 수 있을 것 같다.³⁵⁾

‘a는 A의 증명이다’는 표현형식의 특정한 사례들이 명제적 내용을 지니는 것으로 여겨질 수 있다고 하더라도, ‘x는 y의 증명이다’는 표현의 첫 번째 논항이 모든 구성들을 정의역으로 하고 두 번째 논항이 모든 명제들을 논항으로 하는 이항명제함수를 나타내는 것으로 여겨질 수는 없다. 명제함수의 정의역은 집합이어야 하지만, 명제들 전체나 구성들 전체에 해당하는 집합은 없기 때문이다. 우선 명제들 전체가 집합이 될 수 없는 것은, 명제들 전체는 집합들 전체와 같고, 집합들 전체가 집합이라면 그 집합의 모든 표준적 원소들, 즉 모든 집합들을 산출하는 규칙이 있어야 하지만, 그런 규칙은 없을 것이기 때문이다.³⁶⁾ 형식언어의 문장과 직관주의적 유형론의 명제를 분명히 구분하지 않으면 이 점은 간과되기 쉽다. 어떤 형식언어든 그 언어의 문장들 전체는 집합이다. 형식언어의 문장들은 그 언어의 문법의 일부인 구문론적 규칙에 의해 산출되기 때문이다. 직관주의적 유형론은 명제형성규칙들을 지니고 있지만, 이런

35) 물론 이 논증이 완벽하지는 않다. 여기서 ‘와일즈의 논증은 페르마의 마지막 정리의 증명이다’는 명제의 표준적 증명으로 간주된 구성, 즉 와일즈의 논증을 페르마의 마지막 정리의 표준적 증명으로 환원하는 방법들을 산출하는 규칙이 있는지 불분명하기 때문이다.

36) 마틴로프는 ‘만약 그런 규칙이 있다고 가정하면, 그런 규칙에 의해 산출된 집합들 전체는 항상 그런 규칙에 의해 산출되지 않는 새로운 집합이 되는 모순이 도출된다.’고 논증한다. (Martin-Lof, 1984, p. 87.)

규칙들에 의해 형성되지 않는 것들은 명제가 아니라는 규칙은 없으며, 필요하면 새로운 명제형성규칙들이 도입될 수 있다.

명제들 전체가 집합이 될 수 없어서 'x는 y의 증명이다'는 관계가 이항명제함수를 나타내지 못하더라도 하더라도, 어떤 특정한 명제 A가 주어지면, 'x는 A의 증명이다'는 일항명제함수를 나타내는 표현으로 여겨질 수 있지 않을까? 그러나 여기서 x의 정의역이 구성들 전체로 간주된다면, 이는 명제함수를 나타낼 수 없다는 점은 명백할 것이다. 명제들 전체를 산출하는 규칙이 있을 수 없다면, 구성들 전체, 즉, 가능한 명제들의 증명들의 후보 전체를 산출하는 규칙이 없다는 점은 분명할 것이기 때문이다. 그런데 가능한 명제들의 증명들의 후보 전체는 집합이 될 수 없더라도, 특정한 명제의 증명들의 후보는 집합이 될 수 있지 않을까? 예컨대 'x는 페르마의 마지막 정리의 증명이다'는 표현에서 x의 정의역을 모든 가능한 구성들로 간주하지 않고 어떤 규칙에 의해 회귀적으로 규정될 수 있는 집합으로 간주할 수 있지 않을까? 만약 그렇다면 페르마의 마지막 정리의 증명들 전체는 집합이 될 것이다. 그렇지만, 모든 명제나 모든 구성을 산출하는 규칙이 없다면, 페르마의 마지막 정리의 증명들 전체를 산출하는 규칙도 없다고 해야 할 것이다. 페르마의 마지막 정리의 증명은 그 정리의 표준적 증명을 산출하는 방법이다. 와일즈는 그런 방법들 중의 하나를 찾아내었다고 여겨지지만, 그런 모든 방법들을 산출하는 규칙이 있다고 할 수는 없을 것이다. 예컨대 아직 아무도 파악하지 못한 개념에 의존하여 그 정리의 표준적 증명을 산출하는 방법이 얼마든지 있을 수 있다. 이 점 또한 'x는 A의 증명이다($x: Pf(A)$)'는 표현을 한 형식체계, 예컨대 페아노 산수에서 정의되는 $Pf(x, 'A')$ 와 분명히 구분하지 않으면 간과되기 쉽다. 어떤 형식체계든 그 체계에 속하는 문장의 증명들 전체는 회귀적으로 열거가능하며, 따라서 $Pf(x, 'A')$ 는 당연히 (회귀)집합이 된

다. 그러나 이는 A의 증명, 즉 A의 표준적 증명을 얻는 방법들을 그 형식체계에서 나타낼 수 있는 방법으로 국한하기 때문에 성립하는 결과이다. 그 결과, 괴델의 정리에서 드러나듯이 증명가능성, 즉 증명의 존재와, 수학적 진리 간의 간격이 생기게 된다. 직관주의자들은 증명개념이 어떠한 한 형식체계에서 완전히 포착된다고 여기지 않는다. 그 한 이유는 명제들이나 구성들 전체를 산출하는 규칙이 없기 때문이다. 직관주의적 유형론에서의 증명개념은, 어떤 형식체계에서의 도출관계를 반영하는 것이 아니라 비형식적인 직관주의적 증명개념을 반영하는 것이다.

페르마의 마지막 정리의 증명들 전체는 집합은 아니지만 한 유형이 된다. 어떤 구성이 페르마의 마지막 정리의 증명으로 간주되기 위해서는 그것이 그 정리의 표준적 증명을 얻는 방법이라는 적용조건을 만족하면 되고, 어떤 두 구성이 페르마의 마지막 정리의 같은 증명으로 간주되기 위해서는 그것들이 그 정리의 같은 표준적 증명을 얻는 방법이라는 동일성조건을 만족하면 되기 때문이다. 직관주의적 유형론에서의 유형은 적용조건과 동일성 조건에 의해 규정되고, 수량명사로 나타내어지는 일반개념 또한 적용조건과 동일성 조건에 의해 규정되므로, 수량명사로 나타내어질 수 있는 일반개념은 직관주의적 유형론에서의 유형으로 간주될 수 있을 것이다.

이제 A가 명제일 때 ‘A의 증명이 존재한다’고 할 때의 ‘존재’는 존재양화사가 아니라 일반 개념의 존재를 나타낸다는 마틴뢰프의 주장은 다소 분명해졌다. ‘A의 증명이 존재한다’ ($Pf(A)$ exists)는 표현은, 어떤 유형 a 에 대해, a exists 라는 존재판단의 사례이며, $\Sigma(A, B)$ 혹은 $(\exists x \in A)B$ 와 같은 형식의 명제를 나타내지 않는다. 아울러 지금까지의 분석에 의하면, 증명의 존재에 관한 판단이 명제적 내용을 지니지 않는 이유는 판단의 주장적 효력과는 무관하다. 지금까지의 분석이 옳다면, 그 진정한 이유는 명제 혹은 집합

의 본성에 관한 직관주의적 견해에 기인한다. 또한 어떤 수학적 명제 A에 대해 A가 참이라는 판단은 A의 증명이 (잠재적으로) 있다는 판단과 같으며, 이 판단의 내용이 명제 A와 같지 않은 한, A가 참이라는 판단은 (덤뭇의 이해와는 달리) 명제 A와 주장적 효력으로 완전히 분석될 수 있는 것이 아니다.

마틴뢰프와 준훔은 때로는 존재판단을 생략적인(elliptical) 혹은 불완전한(incomplete) 판단이라고 한다.³⁷⁾ ‘A의 증명이 (잠재적으로) 존재한다’는 판단이 생략적이라는 의미가 그런 판단의 내용에 어떤 특정한 구성 a에 대해 a가 A의 증명이라는 점을 판단자가 알고 있다는 내용이 포함되어 있는 것으로 여긴다면, 이는 올바른 주장이 되지 못할 것이다. 마틴뢰프와 준훔의 견해에 따르면, 와일즈의 논증이 알려지기 이전에도, 페르마의 마지막 정리는 참이라는 판단은 실제로 가능한 판단이며 따라서 페르마의 마지막 정리의 증명이 잠재적으로 존재한다는 판단은 옳은 판단이라고 해야 할 것이다. 그렇지만 그 판단의 내용이 판단자가 그 정리의 증명을 구성하는 방법을 알고 있다는 내용을 포함하는 것으로 여길 수는 없을 것이다. 더구나 그들의 용어에 의하면, 리만의 가설과 같은 미결정 명제에 대해, 그 명제가 참이라는 판단은 논리적으로 가능하지만, 그런 판단의 내용이 구체적 증명에 관한 지식을 지니고 있다는 내용을 포함할 수는 없다. ‘A의 증명이 있다’는 판단이 그들이 의미하는 현실적 판단으로 이해된 경우에도, 그 판단내용에 판단자가 그런 구체적인 지식을 지니고 있다는 내용이 포함되어있다고 하기는 힘들 것이다. 어떤 특정한 구성 a에 대해 a가 A의 증명이라는 개별판단은 A의 증명이 있다는 존재판단을 하기 위한 표준적인 근거가 되고, 직관주의적 유형론에서 존재판단의 의미는 그 판단을 올바르게 하기 위해서는 그 사례에 해당하는 개별판단내용에 관한

37) Martin-Löf (1984), Sundholm (1994b), (2004) 등을 볼 것.

지식을 지니고 있어야 한다는 조건에 의해 설명되지만, 이 조건이 존재판단의 내용과 같은 것으로 여겨져야 할 필요는 없다. 이는 또한 분석판단과 종합판단에 관한 마틴뢰프의 견해와도 양립되기 힘들다. ‘A가 참이다’는 판단의 내용이 ‘a가 A의 증명이다’는 판단의 내용으로 환원된다면, 후자는 분석판단인데 반해 전자는 종합판단이라는 그의 주장과 상충할 것이기 때문이다.

5. 나가는 말

지금까지의 논의가 직관주의적으로 적합한 객관적 진리개념을 제시하는 문제에 어떤 기여를 할 수 있는지 살펴보자. 프라우itz는 어떤 수학적 진술 A가 참이기 위한 필요충분조건은 A의 증명이 무시제적이고 추상적인 의미에서 존재한다는 것이라고 하였다. 그는 덤밋의 비판에 맞서서, 증명의 무시제적이고 추상적인 의미에서의 존재, 혹은 증명의 잠재적 존재는 직관주의적으로 이해될 수 있으며, 그런 잠재적 존재의 객관성 혹은 확정성은 의미에 기인한다고 주장하였다. 이 글에서의 분석이 옳다면, 증명의 잠재적 존재의 객관성 혹은 확정성은 ‘a는 A의 증명이다’는 판단의 옳고 그름은 a와 A의 의미에 의해 결정되는 문제라는 점에 기인한다. 또한 일반적으로 ‘A가 참이다’, 즉 ‘A의 증명이 존재한다’는 판단은 존재판단으로 그 내용은 존재양화에 해당하는 명제적 내용과 같지 않다. 따라서 이 글의 논의가 옳다면, 직관주의적 유형론에 의거한 진리개념의 분석은 프라우itz의 것과 같은 직관주의적이고 객관적인 진리개념을 보다 더 분명한 형태로 제시한 것이 된다.³⁸⁾

38) 마틴뢰프는 Martin-Löf (1996) 등에서 증명(대상), 명제 및 (명제의) 진리는 존재론적 개념이며, 입증, 판단 및 (판단의) 옳고 그름은 인식논적 개념이라고 주장하며, 프라우itz는 이 점을 비판한다. (Prawitz (2012a), (2012b)). 프라우itz의 해석이 옳다면 마틴뢰프는 그의 후기 저술에서, 아마 Sundhom

덤밋과 같은 주관적 진리개념의 옹호자는 ‘어떤 판단이 실제로 가능한 판단이라는 것을 어떻게 아는가?’ ‘어떤 잠재적 존재판단이 옳다는 것을 어떻게 아는가?’란 질문을 제기할 것이다. 이 글에서의 논의는 다음과 같은 답변을 지지할 것이다. 물론 골드바흐의 추측이 참이라는 잠재적 판단, 즉 골드바흐의 추측의 증명이 잠재적으로 존재한다는 판단이 옳다는 것을 알기 위해서는 골드바흐의 추측이 참이라는 현실적 판단, 즉 골드바흐의 추측의 증명이 현실적으로 존재한다는 판단을 내릴 수 있어야 한다. 우리는 골드바흐의 추측이 참이라는 잠재적 판단, 즉 골드바흐의 추측의 증명이 잠재적으로 존재한다는 판단이 옳은지 지금 알지 못한다. 그렇지만 골드바흐의 추측이나 그 명제의 부정에 대한 증명이 존재한다면, 이는 우리가 사용할 언어의 의미에 의해 결정되는 객관적인 문제이다. 골드바흐의 추측 혹은 그 부정에 대한 증명이 잠재적으로 존재한다면, 이는 우리의 현실적 지식과는 독립적이라는 점에서 객관적이지만, 지식가능성과 독립적인 것은 아니다. 우리가 사용할 수 있는 언어, 우리가 파악할 수 있는 개념은 우리의 지식가능성을 규정 짓는 요소이기 때문이다.

(2004)에서 나타난 바와 같이, 의미론적 반실재론(검증주의)에 증명의 존재에 관한 실재론을 혼합한 형태의 입장으로 전환하였다. 프라우츠는 마틴외프의 이런 입장이 직관주의적 유형론에 의해 강요되는 것으로 여기지는 않으며, 필자도 이 점에 동의한다.

참고 문헌

- 정인교 (2011a), “직관주의적 유형론에서의 명제와 판단”, 『논리연구』, 제14집 2호, pp. 39-75.
- 정인교 (2011b), “직관주의적 유형론에서의 분석성과 완전성”, 『논리연구』, 제14집 3호, pp. 101-136.
- 정인교 (2013), “직관주의적 진리개념”, 『철학연구』, 제102집, pp. 151-184.
- Dummett, M. (1977), *Elements of Intuitionism*, Oxford Univ. Press.
- Dummett, M. (1994), “Reply to Sundholm”, in McGuinness and Oliveri (1994), pp. 318-328.
- Dummett, M. (1998), “Truth from the Constructive Standpoint”, *Theoria* 64, pp. 122-138.
- McGuinness, B. and G. Oliveri (eds.) (1994), *The Philosophy of Michael Dummett*, Boston: Kluwer.
- Martin-Löf, P. (1984), *Intuitionistic Type Theory*, Napoli: Bibliopolis.
- Martin-Löf, P. (1987), “Truth of a Proposition, Evidence of a Judgement, Validity of a Proof”, *Synthese* 73, pp. 407-420.
- Martin-Löf, P. (1991), “A Path from Logic to Metaphysics”, *Atti del Congresso Nuovi problemi della logica e della filosofia della scienza. Viareggio genario 1990. Vol II.* CLUB, Bologna, pp. 143-149.
- Martin-Löf, P. (1994), “Analytic and Synthetic Judgement in Type Theory”, in Parrini, P. (ed.) *Kant and Contemporary Epistemology*, Kluwer, pp. 87-99.
- Martin-Löf, P. (1996), “Truth and Knowability: On the Principles C and K of Michael Dummett”, in Dales, D. and G. Oliveri (eds.) *Truth in Mathematics*, Oxford: Clarendon, pp. 105-114.
- Martin-Löf, P. (2013), “Verificationism Then and Now”, in M. Van

- der Schaar (ed.) *Judgement and the Epistemic Foundation of Logic*, Dordrecht: Springer, pp. 3-14.
- Prawitz, D. (1994), "Meaning Theory and Anti-Realism", in McGuinness and Oliveri (1994), pp. 79-89.
- Prawitz, D. (1998a), "Truth from a Constructive Perspective", in Martinez, C. et al. (eds.), *Truth in Perspective*, Sydney: Ashgate, pp. 23-35.
- Prawitz, D. (1998b), "Comments on the Papers", *Theoria* 64, pp. 283-337.
- Prawitz, D. (1998c), "Truth and Objectivity from a Verificationist Point of View", in Dales, H. G. and G. Oliveri, (eds.), *Truth in Mathematics*, pp. 41-51.
- Prawitz, D. (2012a), "Truth and Proof in Intuitionism", in P. Dybjer et al. (eds.), *Epistemology and Ontology*, Dordrecht: Springer, pp. 45-67.
- Prawitz, D. (2012b), "Truth as an Epistemic Notion", *Topoi* 31, pp. 9-16.
- Sundholm, G. (1994a), "Vestiges of Realism", in McGuinness and Oliveri (1994), pp. 137-165.
- Sundholm, G. (1994b), "Existence, Proof and Truth-Making: A Perspective on the Intuitionistic Conception of Truth", *Topoi* 13, pp. 117-126.
- Sundholm, G. (2004), "Antirealism and the Roles of Truth", Niiniluoto, I. et al. (eds.), *Handbook of Epistemology*, Kluwer, pp. 437-466.
- Weinstein, S. (1983), "The Intended Interpretation of Intuitionistic Logic", *Journal of Philosophical Logic* 12, pp. 261-270.

고려대학교 철학과

Department of Philosophy, Korea University

ichung@korea.ac.kr

The Notion of Truth in Intuitionistic Type Theory

Inkyo Chung

I examine the notion of truth in the intuitionistic type theory and provide a better explanation of the objective intuitionistic conception of mathematical truth than that of Dag Prawitz. After a brief explanation of the distinction among proposition, type and judgement in comparison with Frege's theory of judgement, I examine the judgements of the form 'A true' in the intuitionistic type theory and explain how the determinacy of the existence of proofs can be understood intuitionistically. I also examine how the existential judgements of the form 'Pf(A) exists' should be understood. In particular, I diagnose the reason why such existential judgements do not have propositional contents. I criticize an understanding of the existential judgements as elliptical judgements. I argue that, at least in two respects, the notion of truth explained in this paper is a more advanced version of the objective intuitionistic conception of mathematical truth than that provided by Prawitz. I briefly consider a subjectivist's objection to the conception of truth explained in this paper and provide an answer to it.

Key Words: Intuitionistic type theory, Intuitionistic notion of truth, Existence of proofs, Martin-Löf, Prawitz