논리연구 22-1(2019) pp. 43-86

ZFC와 열거불가능성

안 요 한

【국문요약】 1차 이론인 ZFC는 뢰벤하임-스콜렘 정리(이하 ‘LST’)에 의해 그것이 일관적이라면(모형(M_1)이 존재한다면) 그것은 이행적인 열거가능한 모형(M_2)을 갖는다. 이러한 사실에 의해 ‘스콜렘 역설’이라 불리는 역설적 상황이 발생한다. 스콜렘의 전형적인 해소 방식에 따라, 이것은 어렵지 않게 해소될 수 있지만 그 과정에서 우리는 집합 개념에 대한 모형 상대성을 받아들여야 한다. 이것은 예를 들어 <x가 열거불가능하다>는 집합론적 개념의 의미가 모형에 따라 다르게 주어지는 상황을 발생시킨다. 문제는 다음이다. 이 경우에 PN이 열거불가능하다는 사실을 나타내는 ZFC의 문장 ‘¬denu(PN)’이 그 두 모형에서, 진리 값의 측면에서, 똑같이 참이 되기 때문에 ZFC에서는 <¬denu> 개념에 대한 차이를 구분할 수 없는 구분불가능성 문제가 발생한다. 혹은 어떤 것이 의도하는 의미인지 결정할 수 없는 미결정성 문제가 발생한다. 나는 먼저, 이러한 문제가 어떤 성격의 문제인지에 대한 구체적인 분석을 제시할 것이다. 그리고 이러한 문제에 대해서 ZFC를 지지하는 입장에서 할 수 있는 세 가지 방식의 대답을 제시할 것이다. 첫 째로, ZFC에서 모형론을 형식화할 수 있음을 이용하여 모형 상대적으로 다르게 주어질 수 있는 <¬denu> 개념이 ZFC에서도 ‘거의’ 구분될 수 있다는 논변을 제시할 것이다. 두 번째로, <¬denu> 개념의 상대성(구분불가능성)에서 핵심적인 역할을 하는 양화사에 대한 의미론적 고려를 통해 <¬denu>이 본질적으로 혹은 자연스럽게 맥락 의존적으로 의미가 변할 수 있는 것임을 보일 것이다. 그래서 <¬denu> 개념의 모형 상대적인 의미 변화는 ZFC가 책임을 져야할 문제가 아니라 언어 외적인 자연스러운 현상이라는 논증을 제시할 것이다. 세 번째로, 문제의 출발점이었던 비표준 모형이 사실은 <¬denu> 개념의 구조적 내용을 예화 할 수 있어서 그것이 단지 문제적 요소가 아니라 의미론적으로 중요한 역할을 할 수 있음을 논증할 것이다. 이러한 논변들을 통해서 나는 비표준 모형과 관련하여 ZFC에 대해서 발생하는 것처럼 보이는 위의 구분불가능성(혹은 미결정성) 문제가 심각한 것이 아님을 논증할 것이다.

【주요어】 스콜렘 상대성, ZFC, 열거불가능성, ZFC의 구분불가능성(미결정성), 구조적 패턴

투고일: 2018. 11. 29 심사 및 수정 완료일: 2018. 12. 25 게재확정일: 2018. 12. 25

1. ZFC의 모형 상대성과 구분불가능성

LST와 관련하여 ZFC에 대해서 중요하게 고려되는 주제는 스콜렘 역설과 그것의 한 해소책인 상대성 논변이다.[1] 나는 아래에서 스콜렘 역설과 그 한 해법인 상대성 논변을 간략히 살펴보고 상대성 논변과 관련하여 ZFC에 대해서 발생할 수 있는 철학적 문제를 정식화하고 그 문제의 본성에 대해서 살펴볼 것이다.

1.1 <¬denu> 개념과 ZFC의 구분불가능성

칸토르에 의하면, 한 집합은 “우리의 직관 또는 사고의 대상으로서 잘 확정되고 잘 구별될 수 있는 것들의 모임을 한 전체로 이해한 것” 그리고 “그것을 하나로 생각할 수 있는 많은 것 즉, 한 법칙에 따라 한 전체로 결합할 수 있는 확정된 원소들의 한 전체”라고 정의된다(Cantor 1932).[2] 이렇게 이해된 집합들을 다루는 이론이 소박한(naive) 집합론이다. 소박한 집합론은, 두 번째 정의에서 암시된다고도 볼 수 있는, 소박한 포괄원리($\exists y \forall x(x \in y \leftrightarrow \varphi x)$)를 함축한다. 잘 알려져 있듯이, 이것은 모순을 함축한다. 그러므로, 칸토르의 정의에 기반한 집합론은 집합론으로서 적절치 않게 된다. 소박한 집합론에 대한 거부는 단지 모순 때문만은 아닐 수 있다. 또 다른 이유는 소박한 집합론에서 전제하는 “잘 확정되고 잘 구별될 수 있는 것들의 모임”이라는 이러한 직관적인 집합 개념과 관련된 인식론적 불만에 기인한다. 공리에 의해 암묵적으로 정의된 것

---

1) 이 글에서는 서술의 편의상 ‘LST’는 아래 방향의(downward) 뢰벤하임-스콜렘 정리를 지시하는 것으로 전제할 것이다. 그리고 ‘¬denu(x)’은 ‘x가 열거불가능하다’는 자연 언어 술어에 대한 형식이론 ZFC에서 식(축약)을 나타낸다. ‘<¬denu>’은 개념을 나타낸다.

2) 이 정의는 불로스(Boolos(1971) p.486)에서 재인용한 것이다.

과 대조되는, 직관적으로 이해되어진 어떤 모임으로서 집합 개념은, 일반적으로 잘 알려져 있듯이, 임의의 무한 집합 개념과 관련해서 그것이 어떠한 내용을 가지는지 즉, 어떠한 원소들로 구성되는지에 대해서 우리가 분명한 규칙이나 원리를 제시할 수 없는 경우가 발생하기 때문에, 그러한 것들에 관한 인식론적 문제를 발생시킨다 (Jane (2001) p. 13). 이와 같이, 소박한 집합론과 그것의 직관적인 집합 개념에 대한 문제로 인해 우리는 자연스럽게, 남은 선택지인, 공리적 집합론인 ZFC로 향하게 된다. 이 경우에 1차 형식 이론인 ZFC의 의미는 타르스키에 의한 모형론적 의미론이 전제되어 모형 상대적으로 주어진다. 이러한 동기를 가지는 1차 이론인 ZFC는 모순이 발생하지 않으며(아직까지는 그리고 앞으로도 거의), 우리가 일반적으로 참이라고 받아들이는 집합론적 내용들에 대한 (부분적인)올바른 형식 이론으로 간주된다. 이 글에서 고려하려는 문제는 ZFC에 다음의 뢰벤하임-스콜렘 정리(LST)가 적용됨으로 시작된다.

> LST: 일차 이론 T가 일관적이라면(무한 모형이 존재한다면) 그것에 대한 이행적이면서 열거가능한 무한 모형이 존재한다.[3)]

이 경우에 ZFC는 그것이 일관적이라는 가정 하에서(즉, 모형이 존재한다면) LST(와 모스톱스키(Mostowski))에 의해 열거가능한 이행적 모형을 가진다.[4)] 이러한 사실에 의해 다음과 같은 역설적 상황이 발생한다. 자연수 집합(N)의 멱 집합(PN)이 열거불가능하다는 사실을 나타내는 문장 '¬denu(PN)'은 부분집합 공리와 멱집합 공리

---

3) 여기서는 항 모형이나 정수 모형 버전이 아닌 집합 버전을 다룰 것이다. 항이나 정수들 역시 집합들로 정의할 수 있다는 의미에서 모형의 원소들에 의한 차이는 이 글에서 중요하게 고려하지는 않을 것이다.

4) 모스톱스키 정리에 대한 구체적 내용은 Kunen(1987), p.105와 p. 140을 참조하시오.

에 의해 ZFC에서 참인 것으로 증명된다. 즉, PN은 ZFC의 모든 모형에서 열거불가능하다는 사실이 성립한다. 그리고 ZFC의 모형 <M_1, ∈>(이후에는 'M_1'으로 표기)이 존재한다면, LST(와 모스톱스키 정리)에 의해, $M_2 \subseteq M_1$인 ZFC의 이행적(tr) 열거가능한 (denumerable) (부분)모형 <M_2, ∈>(이후에는 'M_2'으로 표기)가 존재한다. 그러면 M_2는 '¬denu(PN)'을 참으로 만들면서 M_2의 이행성(tr)과 열거가능성에 의해, M_2의 원소인 'PN'의 지시체는 열거가능하게 되는 역설적 상황이 발생한다.

스콜렘 역설: $tr(M_2) \land denu(M_2) \land M_2 \vDash \neg denu(PN)$

이러한 역설적 상황은 다음과 같이 해소될 수 있다. 먼저, '¬denu(PN)'의 의미는 PN과 자연수 집합 N 사이에 1:1 onto 함수 f_{denu}가 존재하지 않는다는 방식으로 정의된다($\neg\exists f(f{:}\omega \xrightarrow[onto]{1:1} x)$). 이러한 내용을 만족하면 '¬denu(PN)'이 참이된다. 이러한 사실이 주어졌을 때, 다음과 같이 M_2에서 '¬denu(PN)'이 참이된다. M_2에서 'PN'의 지시체인 PN^{M_2}와 'N'의 지시체인 N^{M_2} 사이에 열거함수 f_{denu}가 M_2에서 존재하지 않기 때문에, 열거불가능성의 정의에 의해, M_2에서 'PN'의 지시체인 PN^{M_2}은 거기서 열거불가능한 집합으로 간주된다($\neg denu^{M_2}([PN]^{M_2})$). 그래서 '¬denu(PN)'이 M_2에서 참이 되는 것이다. 이러한 사실은 PN^{M_2}이 M_2에 상대적으로 열거불가능하다는 것을 나타낸다. 이 경우에 M_1에서(또는 M_2 밖에서)는 f_{denu}가 존재해서 PN^{M_2}는 M_1에 상대적으로 열거가능하게 된다 ($denu^{M_1}(x) \land |x|=|PN^{M_2}|$). 즉, 이러한 방식으로 '¬denu(x)' 술어(혹은 <¬denu> 개념)에 대한 모형 상대적인 의미부여 방식에 의해서 역설적 상황이 해소된다. 이러한 내용은 다음과 같이 두 가지 측면에서의 상대성으로 요약할 수 있다(여기서 '상대성'은 좀 더

정확하게 말해서 모형에 따라 집합론적 개념의 의미가 변하는 성질을 나타낸다).

> <¬denu> 개념의 상대성: $M_2 \subseteq M_1$인 ZFC의 모형 M_1, M_2에 대해서 집합 PN^{M_2}(‘PN’의 M_2에서의 지시체)이 M_2에서 열거가능하지 않지만 M_1에서 열거가능하기($denu^{M_1}(PN^{M_2}) \wedge \neg denu^{M_2}(PN^{M_2})$)때문에, 서로 다른 열거불가능성 개념이 적용된다. 그러므로, 그 개념의 의미가 모형에 상대적으로 다르게 주어진다.

이러한 상대성은 또 다른 방식으로 제시될 수 있다. 칸토르 정리에 의해 M_1에서는 ‘PN’에 대한 열거불가능한 지시체가 존재해야 한다. 그러면, 다음과 같이 ‘PN’에 대한 지시체의 상대성이 발생한다.

> ‘PN’의 지시체의 상대성: 집합론의 한 표현(set theoretical term) ‘PN’에 대해서 $[PN]^{M_1} \neq [PN]^{M_2}$인 $[PN]^{M_1}$, $[PN]^{M_2}$이 각각 M_1, M_2에서 그것의 지시체(의미)로 할당된다.

위의 상대성은 ZFC에 대해서 다음과 같은 <¬denu> 개념에 대한 구분불가능성 혹은 미결정성을 발생시킨다(이것은 ‘PN’에 대해서도 마찬가지로 적용된다. 이 둘에 대한 언급은 맥락에 따라 혼용해서 사용할 것이다). 위의 논의에서 봤듯이, 두 모형 M_1, M_2에서는 <¬denu> 개념의 의미가 다르게 주어지지만 ZFC의 ‘¬denu(PN)’ 문장은 그 둘에서, 진리 값의 측면에서, 똑같이 참이 된다. 그래서 모형 상대적으로 다르게 주어질 수 있는 <¬denu> 개념을 ZFC를 통해서는 구분을 할 수가 없다.

> <¬denu>의 형식적 구분불가능성: ZFC의 ‘¬denu(PN)’이 M_1, M_2에서,

> 진리 값의 측면에서, 똑같이 참이 되기 때문에, 두 모형에서 다르게 주어지는 <¬denu> 개념의 의미들을 ZFC에서는 구분할 수가 없다.

그러므로, ZFC를 통해서는 뭐가 의도하는(표준적인) 열거불가능성 개념인지 그렇지 않은지를 구별하거나 결정할 수가 없게 된다. 그래서 위에서 살펴본 <¬denu> 개념에 대한 상대성은 그것에 대한 ZFC의 구분불가능성 혹은 미결정성 문제로 전환된다(나는 '구분불가능성'이라는 표현을 맥락에 따라 '미결정성'이라는 표현과 혼용해서 사용할 것이다). 나는 아래에서 이러한 문제가 어떤 성격의 문제인지에 대한 좀 더 구체적인 분석을 제시할 것이다.

1.2 구분불가능성의 문제와 변형된 게티어(Gettier) 상황

위의 미결정성 문제는 다음과 같은 대조와 유비를 통해 그 문제가 어떤 종류의 문제인지 좀 더 분명하게 제시될 수 있다. 먼저, 우리는 이 문제를 ZFC와 관련된 유명한 미결정성(일반적으로 '결정불가능성'이라 불리는) 문제인 연속체 문제($2^{\aleph_0}=\aleph_1$)와 대조적으로 고려해볼 수 있다. 잘 알려져 있듯이, 연속체 문제 역시 ZFC에서 결정되지 않는 것이다. 즉, 열거불가능한 것으로 증명된 PN의 크기가 구체적으로 어떤 크기($\aleph_{\alpha \geq 1}$)인지 ZFC에서 결정되지 않는다. 그러나 이것은 위에서 고려한 미결정성과는 다른 종류의 문제이다. 연속체 문제 같은 경우에 그것은 아예 ZFC에서 그것이 참이라는 것을 보일 수가 없는 것이다. 즉, ZFC가 그 문장을 연역적으로 결정할 수 없는 경우이다. 이것은 ZFC가 그 문장의 내용에 대해서 전혀 정보를 가지고 있지 않다는 것을 나타낸다. 반면에, 위에서 살펴본 미결정 문제는 ZFC가 '¬denu(PN)'을 참이라고 결정해주지만 열거가능한 비표준 모형의 열거가능한 집합이 그 문장을 참

으로 만드는 상황이 항상 발생하게 되는 문제이다. 우리가 직관적으로 열거가능한 것으로 구별해낸 것에 대해서도 ZFC의 '¬denu(x)' 술어가 적용될 수 있기 때문에, ZFC에서는 우리가 의도하는 표준적인 열거불가능한 집합과 비표준 열거불가능한 집합(직관적으로 열거가능한)에 대해 뭐가 올바른 것인지를 결정하지 못하게 된다. 이러한 문제는 다음의 유비를 통해 그 본성이 좀 더 분명하게 드러난다.

우리는 ZFC 집합론을 하면서 집합과 클래스(class)를 구분한다. 클래스는 너무 커서 집합이 될 수 없는 것들로 집합론에서 그것들은 식(formula) 혹은 술어(predicate)로 나타낸다. 그런데 위와 같이 우리가 ZFC에 대해서 집합론적 의미론(모형론)을 채택한다면 이러한 구분은 위의 미결정적 상황과 유사한 상황을 발생시킨다. ZFC와 같은 집합론에서 양화 문장의 양화사는 모든 집합들에 대한 양화를 말한다. 즉, 그 의미는 모든 집합들을 의미한다. 이 경우에 집합론적 의미론을 전제한다면 이것은 양화사를 어떤 집합 M으로 제약한 것으로 M이 그 양화 문장의 모형이 된다. 그러면 그 문장은 모든 집합들에 대한 양화를 하면서 M에서 성립하므로 M은 모든 집합들을 포함하는 집합이 된다. 즉, M은 모든 집합들의 집합이 된다. 이러한 집합은 러셀의 역설에 의해 존재하지 않는 모순적인 집합이다. 이것 역시 다음과 같은 상대성 개념의 도입에 의해 스콜렘 역설과 유사한 방식으로 해소된다. 이 경우에 대상이론과 메타이론이 둘 다 집합론이기 때문에, 다음과 같은 상대적인 집합/클래스 개념의 의미 변화가 발생한다.

대상 이론에서 모든 집합들에 대한 언급을 하는 양화사의 해석은 메타 이론에서 이루어지는 것으로 일단, 모형 M은 대상이론적 의미(관점)에서 모든 집합들의 클래스를 이룬다. 즉, 그 이론에 대한 집합론적 모형의 도메인은 그 이론에서 클래스로 간주된다. 그

러나 메타이론적 의미에서(혹은 그 모형 밖에서) 그것은 당연히 모든 집합들의 클래스가 아니라 제약된 한 집합이 된다. 이 경우에 대상이론인 집합론은 클래스가 아닌 것을 클래스로 간주하게 되고 그 이론은 클래스와 집합을 구분할 수 없는 혹은 결정할 수 없는 상황에 처하게 된다. 이러한 상황은 스콜렘 상대성에 의한 구분불가능성의 상황과 마찬가지의 내용이라고 볼 수 있다.[5)]

이러한 상황들에 대해서 어떤 철학자들이나 대부분의 수학자들은 얼핏, 수학에서 중요한 것은 연역라는 입장에서 이러한 구분불가능성이나 미결정성 문제를 그냥 무시해버릴 수도 있을 것이다(예를 들어, Bellotti (2006), pp.199-201). 그러나 우리는 일반적으로 집합론을 포함한 수학이론을 하면서 증명을 단지 구문론적인 기호조작이 아닌 그것이 나타내는 어떤 내용이나 의미를 이해한다는 생각 또한 강하게 가지고 있다. 그리고 같은 증명을 통해서 공통된 의미(이해)를 가진다고 생각한다. 이러한 직관에 비추어 봤을 때 위의 생각은 강한 형식주의나 유한주의를 전제하지 않는 한 그리 적절해 보이지 않는다. 더욱이, 다음의 유비 논변은 위의 구분불가능성 문제가 쉽게 무시해버릴 수 없는 철학적 문제가 될 수 있다는 사실을 좀 분명하게 보여준다.

유비적으로 고려할 것은 인식론에서 잘 알려진 변형된 게티어(Gettier) 상황이다. 예를 들어, 어떤 사람이 영화 세트장을 지나가고 있다고 가정해보자. 그리고 거기에는 진짜 오두막이 있고 또한, 제작의 편의상, 겉으로 봐서는 구분이 되지 않는 유사한 가짜 오두막이 세워져 있다고 가정해보자. 그 세트장 안에 있는 그 사람은 가짜와 진짜를 구분하지 못한다. 그 경우에 그 사람이 진짜 오두막

5) 이러한 상황은 비단 이것뿐만 아니다. 함수, 관계(원소관계)등 여러 가지 개념들이, 집합론적 의미론 하에서, 모형에 따라 의미가 변하는 상황이 발생하게 된다. 이러한 내용들은 Kunen(2007), p29. Potter(2004) pp315-6을 참조하시오.

을 보면서 '오두막이 존재한다'는 문장(믿음)을 발화했을 때(유사성에 의해 정당화 또한 보장되었을 때) 그 문장은 참(이면서 정당화된 것)이지만 우리는 그 사람이 그러한 지식을 참되게 가지고 있다고 생각하지 않는다. 즉, 인식주체의 믿음은 우연적으로 참이 되었을 뿐이다. 그러므로 그 사람의 위치에서(혹은 그 사람을 통해서) 발화된 '오두막이 존재한다'는 문장이 참이지만 우리는 그 사람이 말해주는 그 사실(문장)에 대해 믿을만한 것으로 받아들일 수 없을 것이다(Klein, (1976)). 이러한 상황은 ZFC에 대해서도 마찬가지로 적용해볼 수 있다. 위에서 봤듯이, ZFC는 의도하는(표준적인) 열거불가능한 집합(PN^{M_1})과그렇지 않은 열거불가능한 집합(PN^{M_2})을 구분할 수 없기 때문에, 그 이론에서 참인 것으로 증명되는(우리에게 말해주는) '¬denu(PN)' 문장에 대해서 그것이 참이라고 증명되었을지라도 우리는 그것을 믿을 수 없거나 우리는 PN이 열거불가능하다는 사실을 ZFC를 통해서는 분명하게 알 수 없다는 사실이 따라 나온다. 이러한 문제는 아주 단순하게 비유적으로 표현하면 ZFC가 일종의 외부 세계를 보는 렌즈라고 가정했을 때, ZFC-렌즈를 통해서 바라보면 1m 막대를 10m로 보이게끔 렌즈가 왜곡시키는 상황이 항상 발생하게 된다는 문제이다. 즉, ZFC-렌즈를 통해서 막대를 본다면 1m와 10m를 제대로 구분(혹은 결정)할 수는 없게 된다는 것이다. 이러한 논변들에 의해 우리는 1.1에서 살펴본 ZFC의 구분불가능성 상황이 어떤 성격의 철학적 문제를 발생시킬 수 있는지 분명하게 알 수 있을 것이다.[6]

6) 비표준 모형(해석)과 관련된 의미론적 문제의 전형적인 사례는 콰인-크립키(Quine-Kripke)의 의미 회의론의 문제이다(Shapiro(1991), ch.7). 이 글에서는 의도적으로 다른 문헌들에서 거의 다뤄지지 않았던 측면의 문제들을 살펴보고 있는 것이다.

1.3 구분불가능성 재고

이러한 문제의식과 관련하여 좀 더 분명히 지적하고 넘어갈 사항이 있다. 위에서 언급한 문제들은 일견, 아주 이상한 상황들처럼 보일 수도 있다. 왜냐하면 ZFC를 하면서 우리는 위와 같은 문제를 거의 만나지 않기 때문이다. 즉, ZFC를 하면서 증명한 칸토르 정리에 대해서 전혀 불확실한 것으로 생각하지 않는다. 그래서 위에서 살펴본 문제 의식들이 어떻게 성립하할 수 있는지에 대해서 좀 더 분명히 지적하고 넘어갈 필요가 있다. 이러한 문제의 원인은 분명히 (열거가능한)비표준 모형의 존재이다. 이것은 어떻게 존재하는가? LST의 적용에 의해서이다. 그러나 주의해야 할 것은 그것이 곧바로 LST에 의해 따라나오는 것은 아니라는 사실이다. LST는 직접적인 (모형)존재 문장이 아니라, ZFC에 적용했을 때, ZFC의 일관성을 가정하는 조건문이다. 그래서 ZFC의 일관성이 보장되어야 그것의 열거가능 모형 M_2의 존재가 따라나온다. 즉, ZFC의 일관성이 주어져야 문제 자체가 출발할 수가 있다. 불완전성 정리에 의해 ZFC의 일관성을 보이기 위해서는 그것보다 강한 이론이 전제되어야 하고 ZFC는 일반적으로 받아들여지는 가장 강한 수학 이론이기 때문에, 그것에 관한 엄밀한 수학적 증명은 존재하지 않는다. 이러한 사실들을 생각했을 때, 위에서 살펴본 문제의식은 ZFC의 일관성(혹은 그보다 더 강한 내용)을 가정하고 출발하고 있음을 알 수 있다. 그러므로 위에서 고려한 문제가 성립하기 위해서는 엄밀한 증명이 존재하지 않는 ZFC의 일관성을 명시적으로 전제하는 것이 그럴듯한 것인지에 대한 숙고를 해야 할 것이다. 아래에서 보겠지만, 이와 관련된 논의는 약간의 미묘한 내용을 포함한다.

그 내용을 이해하기 위해서 먼저 PA와 관련된 산수의 소진불가능성(inexhaustibility)에 관한 내용을 살펴보는 것이 도움이 된다.

일반적으로, 우리는 PA를 하면서 그것의 일관성을 거의 의심하지 않는다. 즉, 그것의 일관성을 암묵적으로 받아들인다. 그러나 그것을 명시적으로 나타낸(즉, 코딩에 의해 메타이론적 내용을 대상이론의 문장으로 형식화한) Con(PA)는 PA에서 증명되지 않는 문장으로 이것을 그것의 한 문장(공리)으로 가지는 이론은 PA보다 강한 새로운 이론(PA+Con(PA))이다. 즉, PA의 일관성을 암묵적으로 받아들이는(전제하는)것과 그것을 명시적으로 나타내는 상황은 전혀 다른 이론적 상황을 발생시킨다(Franzen(2004), ch. 13). 이것은 ZFC에 대해서도 마찬가지이다(ZFC의 일관성은 PA의 일관성에 대한 믿음만큼 강하지 않을 수 있지만). 일반적으로 우리는 ZFC에 대해서 그것이 우리가 믿고 있는 참인 집합론적 내용들에 대한 올바른 (부분적인)형식화라는 사실을 받아들인다. 이것은 우리가 ZFC를 하면서 자연스럽게 Con(ZFC)를 암묵적으로 받아들이고 있다는 사실을 나타낸다. 이 경우에도 Con(ZFC)는 ZFC에서 증명될 수 없기 때문에, 그러한 내용을 명시적으로(문장으로) 나타낸 결과는 형식적으로 ZFC를 넘어서는 ZFC+Con(ZFC)가 될 것이다.

더욱이, ZFC의 구분불가능성 논변을 위해서는 ZFC의 두 모형에 대한 언급이 필요하다. 즉, ZFC가 각각의 모형에서의 PN^{M_1}과 PN^{M_2}을 구분하지 못한다고 말을 할 때, 이미 두 다른 모형에 대한 명시적인 언급이 필요하다. 그러기 위해서 먼저 표준적인 집합 모형의 존재가 보장되어야 한다. 집합으로서 ZFC의 표준 모형이 되는 것은, 주어진 집합을 확장시키는 공리들인, 치환($\forall x \exists ! y \ \ F(x, y) \rightarrow \forall z \exists w \forall y (y \in w \leftrightarrow \exists x \in z F(x, y))$)과 멱집합 공리($\forall z \exists y \forall x (x \in y \leftrightarrow x \subseteq z)$)들을 만족시켜야 하기 때문에, 최소한 강한 도달불가능한 기수(strongly inaccessible cardinal) I가 되어야 한다.[7] 이

---

[7] 강한 도달불가능한 기수의 의미는 다음과 같이 직관적으로 설명될 수 있다. 유한 집합에 대해 어떠한 공리(무한 공리를 제외한)들을 적용해도 무한에 도달할 수 없는 상황과의 유비에 의해서 ZFC의 공리들을 아무리 많이 적용하여

러한 보장을 위해서는 Con(ZFC) 뿐만 아니라, 그 이상의 내용을 명시적으로 전제해야 한다. 그래서 위에서 살펴본 ZFC의 구분불가능성 논변이 제시되는 이론은, Con(ZFC)을 함축하는, 최소한 ZFC+I가 될 것이다. 그러므로, ZFC에 대한 구분불가능성 논증을 제시하면서 우리는 ZFC+I를 전제하고 있는 것이다. 이러한 관점에서 볼 때(즉, ZFC+I에서 볼 때) ZFC는 의도하는 열거불가능성 개념이 적용되는 PN^{M_1}과 그렇지 않은 PN^{M_2}를 구분하지 못하는 눈이 먼 이론이 된다. 그래서 이러한 확장된 이론을 전제하지 않는다면 ZFC의 구분불가능성에 대한 문제의식은 그 효력을 상실하게 될 수도 있을 것이다. 그러므로 구분불가능성이 효력을 갖기 위해서는 ZFC보다 강한 (메타)이론이 전제되어야 한다. 어떤 사람들은 이러한 강한 전제를 받아들이지 않는 이유에서, 내가 고려하려는 문제의식이든 또 다른 문제의식이든, LST와 관련하여 ZFC에서 발생하는 것처럼 보이는 문제를 해소하려는 논변을 제시한다.[8)]

나는 그러한 생각에 대해서 다음과 같은 이유에서 반대한다. 먼저, Con(ZFC)의 경우에 그것을 내용적인 측면에서 잘 생각해보면, 그것은 우리가 ZFC를 하면서 암묵적으로 자연스럽게 받아들이는 내용을 넘어서는 것이 아닐 수 있다. 즉, 그것은 형식적으로 ZFC를 확장한 것이라고 해도 우리가 ZFC를 하면서 받아들이는 가정을 내용적으로 넘어서는 것이 아닐 수 있다. 위에서 살펴본 Con(PA)를 유비적으로 다시 생각해보자. 그러한 명시적인 문장은 PA에서 증명되지 않기 때문에, 그것을 명시적으로 나타낸(전제한) 이론은

도 도달할 수 없는(공리들에 대해 닫히는) 성격을 갖는 것이 강한 도달불능 기수이다. 엄밀한 정의는 Devlin(1994), ch.3.10 참조하시오.

8) 이러한 가정 자체를 의심함으로 비표준 모형과 관련하여 ZFC에 대해서 발생하는 것처럼 보이는 문제들을 해소하려는 생각은 Hallet(1994), p.81에서 나타난다. 그리고 문제의식의 지점은 다르지만 그러한 가정이 LST와 관련된 문제의 핵심적 사항이라는 유사한 지적이 Klenk(1976), pp.477-8에서 나타난다.

PA를 넘어서는 확장된 이론이지만, 잘 생각해보면, 그것은 우리가 PA를 하면서 받아들이는 내용(우리의 산술적 지식에 대한 부분적 형식화)을 넘어서는 것이 아니다. 구체적으로, 우리는 PA를 하면서 일반적으로 PA가 산술적 진리에 대한 부분적인 형식화라는 사실을 암묵적으로 전제한다(Franzen(2004), ch. 13). 이 말은 PA에서 증명가능한 것이 참인 산술적 내용이라는 사실을 전제하는 것이다. 간단히 말해서, 거기서 증명가능한 것은 참이라는 사실을 나타내는 반사 원리(reflection principle: $prv_{PA}(\ulcorner\varphi\urcorner)\rightarrow\varphi$)를 암묵적으로 전제하는 것이다(Franzen(2004), ch. 14). 이것은 Con(PA)보다 강한 내용이다. 이러한 사실은 Con(PA)라는 것이 우리가 PA를 하면서 암묵적으로 받아들이는 내용을 넘어서지 않는다는 것을 나타낸다. 그러므로, Con(PA)를 전제하는 것은, 내용적인 측면에서, 우리가 PA를 받아들이면서 전제하는 내용을 넘어서는 것이 아닐 수 있다. 이러한 생각을 Con(ZFC)에 대해서도 적용해서 생각해볼 수 있다. Con(PA)와 비교해 Con(ZFC)는 덜 분명할 수 있기 때문에, 좀 더 구체적인 고려가 필요하다.

Con(ZFC)의 경우에 그것이, 내용적인 측면에서, 우리가 ZFC를 하면서 암묵적으로 전제하는 내용을 넘어서는 것이 아닐 수 있다는 생각은 Con(ZFC) 이외의 ZFC와 독립적인 다른 문장들과의 비교를 통해 간접적으로 확인할 수 있다. 논의의 편리성을 위해서 지금의 맥락에서는 Con(ZF)의 경우를 고려해보자. 예를 들어, 일반 연속체 가설(GCH:$2^{\aleph_\alpha}=\aleph_{\alpha+1}$)이나 구성가능성 공리(V=L)들은 어떤 특수한 목적을 가지고 ZF에 추가될 수 있는 것으로 그것이 추가되어 확장된 이론들은 형식적인 측면에서 뿐만 아니라 내용적인 측면에서도 더 나아간 이론이다. GCH의 경우에 그것은 ZF를 받아들이면서 암묵적으로 받아들일 수 있는 내용이 아니라, 그것을 넘어서는 것으로 그것이 가정되면 선택 공리(ZF와 독립적인)를 공리가 아닌

한 정리로 증명할 수 있다(Drake(1996), ch. 8). 그리고 도달 불능 기수에 대한, ZF(혹은 ZFC)에서 증명할 수 없는, 여러 결과들을 증명할 수도 있다(Devlin(1994) ch. 3.10). V=L이 추가된 상황 또한 이와 유사한 상황이다. 그것을 추가함으로 형성된 이론 ZF+V=L은, ZF에서는 증명되지 않는, 연속체 가설이나 선택 공리 등을 그 이론에서 참인 것으로 증명할 수 있다(이 외에도 많은 새로운 결과들이 증명된다: Kunen(1980), ch.5). 반면에, Con(ZF)를 가정하면 위에서 언급한 결과들에 대한 상대적 일관성을 증명할 수 있을 뿐이다(Con(ZF) → Con(ZF+V=L), Con(ZF)→Con(ZF+GCH)). 그리고 반대로 ¬(V=L)과 ¬GCH의 상대적 일관성 또한 증명할 수 있다. 이러한 사실들이 말해주는 것은, GCH의 경우를 예를 들면, 그것이 참이라는 강한 사실이 아닌 단지 참일 수도 있고 거짓일 수도 있다는 그런 정도의 아주 약한 사실을 말하는 것이다. 이러한 사실들은 Con(ZF)에 대해서 그것이 우리가 ZF를 하면서 암묵적으로 전제하는 내용을 넘어서지 않는다는 것을 간접적으로 보여준다고 볼 수 있다.

더 강한 진술인 I에 대해서는 직관이 다를 수도 있지만, 생각해보면 이것 또한 ZFC를 받아들이면서 자연스럽게 고려할 수 있는 내용을 넘어서는 것이 아님을 알 수 있다. 혹은 그렇다하더라도 다음의 사실들을 고려해보면 그것이 아주 비약적인 생각은 아니라는 것을 알 수 있다. 위에서도 언급했듯이, 우리는 ZFC를 하면서 일반적으로 그것에 대해 우리가 참이라고 생각하는 집합론적 내용(그것이 존재한다면)에 대한 부분적인 올바른 형식화라는 사실을 암묵적으로 받아들인다(그러한 받아들임이 한편으로 막연하고 무반성적인 성격을 가지는 것 또한 사실이지만). 이 말은 우리가 ZFC를 하면서 그것에 대해서 두 가지 중요한 내용을 암묵적으로 전제하고 있음을 나타낸다. 먼저, ‘올바른 형식화’라는 표현은 ZFC에서 증명

가능한 문장이 집합들에 관한 참이라는 사실을 말한다. 그리고 ‘부분적’이라는 표현은 ZFC에서 참이라고 증명되는 내용이 일종의 집합들의 세계(막연하고 분명치 않을 수 있지만)에 대한 부분적 반영이라(혹은 그 세계가 완전히 기술될 수 없다)는 사실을 나타낸다. 괴델-폰 노이만 이후로 ZFC가 의도하는 표준적인 집합 개념 혹은 집합들의 세계는 일반적으로 ‘~의 집합’ 연산이 반복적으로 적용되어 형성되는 반복적 구조의 V로 간주된다(Gödel, (1947/64), Wang, (1974) 등). 그러면, 이러한 암묵적 전제하에서, ZFC는 V에 대한 부분적인 반영으로, ZFC의 모든 공리들은 V의 어떤 부분적인 세계(부분집합)에서 성립하게 된다. 즉, ZFC의 모든 공리들이 V보다 작은 어떤 집합 V_β에서 성립한다(즉, V_β로 반사 된다[reflect down]). 특히, 집합을 확장시키는 모든 치환과 멱집합 공리들이 V에서 성립하기 때문에, 그것들 역시 V_β에서도 성립한다. 이러한 내용은 다음과 같은 원리(full-reflection principle)를 말하는 것이다. $ZFC^V \leftrightarrow ZFC^{V_\beta}$(즉, $ZFC \leftrightarrow ZFC^{V_\beta}$). 이 경우에 V_β는 I가 될 것이다.[9] 이것은 ZFC의 집합 모형의 존재를 말하는 것으로, 그것은 당연히 ZFC에서는 증명될 수 없다. 그러나 위의 논변에서 알 수 있듯이, 이러한 내용은 우리가 ZFC를 하면서 암묵적으로 전제하거나 받아들이는 내용(‘올바른 부분적인 형식화’)들로부터 자연스럽게, 직관적인 맥락에서, 추론할 수 있는 것이라고 볼 수 있다.

더욱이 위와 같은 온전한 반사 원리는 형식적 제약에 의해 우리가 ZFC에서 증명할 수는 없지만 그 내용에 준하는, 임의의 $\phi_1,...,\phi_n$($ZFC \vdash \phi_1,...,\phi_n$ 인)에 대한, 국소적 반사원리(local-reflection

9) 반사 원리가 I에 한 직관적인 근거가 된다는 논변과 도달불능 기수가 우리의 집합론적 직관에 부합한다는 설명은 여러 문헌들에서 나타난다. 대표적으로 Maddy(1988), p.503, Devlin(1994), ch.3.10 그리고 ZFC가 의도하는 반복적 집합 개념으로부터의 도달불능 기수에 대한 적극적인 지지는 여러 문헌들에서 나타난다. 대표적으로 Gödel(1947/1964), pp476-477.

principle)를 ZFC에서 증명할 수 있다(이와 관련된 내용은 2.2에서 다시 다룰 것이다). 이러한 사실들은 I에 대해서 그것이 우리가 ZFC를 하면서 암묵적으로 받아들이는 내용을 넘어서는 내용이 아닐 수 있거나 그렇다고 하더라도 위에서 살펴본 다른 공리들에 상대적으로 덜 비약적인 성격을 가진다는 것을 나타낸다고 볼 수 있다. 이러한 점에서 나는 Con(ZFC)나 I에 대한 엄밀한 수학적 증명이 없다고 해서 문제의 출발을 억제함으로 문제를 무효화 시키는 것은 그리 생산적인 해법이 아니라고 생각한다. 내가 여기에서 고려하는 것은 ZFC+I와 같은 더 강한 (메타)이론의 관점에서 볼 때,[10] 과연 ZFC가 <¬denu> 개념에 대한 구분되는 내용을 구분하지 못하는 눈이 먼 이론이라는 문제에 대해서이다.

나는 아래에서 이러한 경우에 ZFC를 지지하는 입장에서 위의 문제들에 대해 어떻게 그리고 어느 정도까지 대답할 수 있는가를 세 가지 논변들을 통해 살펴보려고 한다. 첫 번째로, 형식적 구분불가능성 문제와 관련하여 ZFC에서도 유의미한 방식으로 거의 구분할 수 있다는 논변과 그 다음으로, <¬denu> 개념의 상대성과 관련하여 핵심적인 내용인 양화사의 의미론에 대한 숙고를 통해서 구분불가 문제의 책임이 ZFC에 있는 것이 아니라는 논변을 두 번째로 제시할 것이다. 마지막으로, 집합 개념의 본성에 대한 고려에 의해 비표준 모형들이 <¬denu> 개념의 의미와 관련하여 ZFC에 대한 단지 문제적 요소가 아니라, 의미론적으로 중요한 역할을 한다는 논변을 제시할 것이다.

---

10) 여기서 나는 위에서 고려한 강한 전제들(Con(ZFC)나 I에 대한)이 그 자체로 참이라고 주장하는 것이 아니다. 그러한 가정이 ZFC와 관련해서 아주 임의적이거나 인위적인 가정이 아니라는 것을 말하고 있다. 즉, 여기서 고려하는 문제가 ZFC 이외의 다른 독립적인 내용을 갖는 비약적인 전제 하에서 고려하는 것이 아니라는 점을 말하고 있는 것이다.

2. 형식적 구분가능성과 ZFC

위의 게티어 사례와 ZFC의 (형식적)구분불가능성에서 드러나는 공통적인 문제는 둘 다 고려하는 문장을 참으로 만들지만 실제 의도한 것과 의도하지 않은 것을 구분할 수 없음에 의해서 발생하는 것이다. 게티어 사례에서 진짜와 가짜를 구분할 수 있다면 그 존재 문장은 주체의 참된 지식이 될 수 있고 그러한 발화에 대해 우리는 믿을만한 것으로 받아들일 수 있을 것이다. 이것은 ZFC에 대해서도 마찬가지이다. ZFC가 의도하는 <¬denu> 개념과 그렇지 않은 것을 구분할 수 있다면 ZFC가 증명해내는 <¬denu>에 대한 결과들에 대해서 위에서 고려한 문제들을 가지지 않을 것이다. 아래에서 나는 이것이 ZFC에서 유의미한 방식으로 가능함을 보일 것이다.

2.1 게티어 상황과 모형들

그러면 좀 더 간단해 보이는 게티어 사례를 통해서 그 구분을 어떻게 할 수 있는지 생각해보자. 주체가 진짜와 가짜 오두막을 어떻게 구분할 수 있는가? 그것은 간단하다. 인식 주체가 그 사람에 대해서 지식을 귀속시키는 화자의 위치에 있다면(즉, 가짜건 진짜건 오두막들을 포함하는 세트장 전체를 한 눈에 볼 수 있으면) 될 것이다. 즉, 볼 수 있는 것이 단지 세트장 안에 있는 오두막뿐만 아니라 그것을 포함하는 세트장 전체를 볼 수 있는 위치에 있으면 그 오두막들 중에서 진짜와 가짜를 구분할 수 있을 것이다. 그러면 이러한 생각을 ZFC의 논의에 대해서도 적용할 수 있는가? 이러한 생각은 ZFC에 대해서도 ‘거의’ 마찬가지로 적용될 수 있다(‘거의’라는 수식어가 붙은 것은, 아래서 보겠지만, 약간의 제약적인 방식으로 이루어지기 때문이다). 그러면 화자의 위치에서 볼 수 있다는

아이디어를 어떻게 ZFC에 대해서도 적용할 수 있는가? 적용하기 위해서 고려할 것이 ZFC를 통해서 본다는 것과 화자의 위치에서 볼 수 있다는 말이 어떻게 이론적으로 해석될 수 있는지 설명되어야 한다.

먼저, 우리가 ZFC를 통해서 본다는 말은 무엇을 의미하는가? 우리가 ZFC를 통해서 본다고 할 때 보는 것은 그것이 참이라고 보여주는 것들이 될 것이다. 즉, 우리는 그것이 참이라고 말해주는(공리와 그것들로부터 증명된) 문장들을 통해서 보게 된다. 모형론을 전제한다면 그것들은 모형들에 상대적으로 거기서 만족되는 내용들이다. 이것을 공간적인 유비로 표현하자면 ZFC를 통해서 보는 것은 항상 모형 안에서 그것의 원소들을 보는 것이다. ZFC를 통해서 우리는 모형 안의 원소들만을 볼 수 있고 그 모형들에서 '¬denu(PN)'이, 진리 값의 측면에서, 똑같이 참이 되는 한에서 ZFC를 통해서 우리는 'PN'의 지시체인 PN^{M_1}과 PN^{M_2}을 구분할 수 없게 된다. 이 때 우리가 그 둘의 차이를 확인할 수 있는 것은(즉, PN^{M_2}가 열거가능하다고 말할 수 있는 이유는), 역설에 대한 해소에서 잘 알고 있듯이, 우리가 그것을 M_2 밖에서(또는 M_1에서) 볼 수 있기 때문이다.

이러한 사실들을 통해 알 수 있는 중요한 내용은 ZFC의 구분불가능성과 관련된 핵심적인 사실은 ZFC를 통해서 PN^{M_2}를 M_2안에서만 볼 수 있느냐 M_2 밖에서도 볼 수 있느냐이다. M_2에 대해서, 그 모형 안에서만 본다면, 열거가능한 PN^{M_2}가 거기서 열거불가능한 것으로 보여진다('¬denu(PN)'이 참이 되기 때문에). 그래서 ZFC에 대해서 PN이나 <¬denu> 개념의 구분불가능성(혹은 미결정성)이 발생하는 이유는 ZFC를 통해서는 모형 안에서만 집합들을 볼 수 있기 때문이다. 그러면, 모형 '안에서' 그리고 '밖에서' 본다는 비유적 표현이 집합론을 하는 맥락에서 어떻게 이론적으로 해석될 수

있나?

'모형 안에서 본다'는 표현의 의미는 위에서 대략적으로 서술된 것처럼 ZFC의 표현에 대해 그 의미가 그 모형의 원소들만을 언급하거나 양화하는 방식으로 주어진다는 말이다. 반면에, 모형 밖에서 본다는 말은 즉, 그 모형 자체와 원소들 그리고 열거 함수들을 양화할 수 있다는 말이다. 그래서, 화자의 위치에서 볼 수 있다는 말은, 간단히 말해서, ZFC의 모형들을 대상으로 다룰 수 있는 위치에 있다는 말이다. 이러한 위치에 있을 수 있는 것은 이론적으로 말해서 ZFC보다 강한 메타이론에서 ZFC의 모형들을 대상으로 다룬다는 것을 의미한다.

ZFC의 모형을 다룰 수 있음이 구분가능성의 핵심이라는 이러한 생각은 1.2의 논의가 제시된 시점에서 이미 암시되었던 생각이기도 하다. 거기서 봤듯이, ZFC의 구분불가능성의 제시는 모형에 대한 양화와 PN^{M_1}, PN^{M_2}의 구분을 전제한다. 그 경우에 그러한 명시적인 양화와 구분은 ZFC보다 확장된 (최소한)ZFC+I에서 이루어진다. 따라서 ZFC가 ZFC+I의 역할을 할 수 있다면 ZFC에서 두 모형 즉, PN^{M_1}과 PN^{M_2}를 구분할 수 있을 것이다. 다시 말해서, ZFC에서 그 둘을 구분하기 위해서는 ZFC의 모형들에 대한 내용을 ZFC에서 서술할 수 있어야 할 것이다. 이것이 가능한가? 그 자체로는 괴델 정리에 의해 당연히 불가능하다. 그러나, 아래에서 보겠지만, 지금의 문제와 관련하여 유의미한 측면에서 가능하다.

2.2 반사원리와 ZFC: 메타이론에 대한 형식화[11)]

일단, 여기서 중요하게 다루는 모형 개념을 생각해보면 그것은

11) 여기서 제시되는 메타이론적 내용에 대한 형식화는 Drake(1996), ch.8과 Kunen(1980), ch.4에서 제시되는 내용을 따라서 간략히 축약한 것이다. 기술적인 결과들에 대한 구체적인 내용은 위의 책들을 참조하시오.

일반적으로 도메인을 집합으로 설정하고 그것의 원소와 부분 집합들을 표현들(항과 술어)에 할당한다는 의미에서 집합론적 성질(또는 집합론적 해석의 성격을 가진다)을 가진다. 단순히 말해서, 모형들 역시 집합들이다.[12] 그래서 일반적으로 형식 이론 T의 모형론은 ZFC에서 제시되는 것으로 간주된다. 그러면, 이 경우에 T가 ZFC일 수 있는가? 즉, ZFC의 모형을 ZFC에서 다룰 수 있는가? 일단, 괴델 정리에 의해 그 자체로는 할 수 없다. 그렇다고 해서 그러한 생각을 아예 포기할 필요는 없다. 아래서 보겠지만, 그러한 내용과 동치의 효력을 지니는 내용을 ZFC에서 형식화할 수 있기 때문이다. 위에서 언급했듯이 (무한)ZFC의 집합 모형은 ZFC에서 다룰 수 없지만 다음의 과정을 통해서 임의이 유한 ZFC인 ZFC^{fin}를 만족시키는 집합 모형은 다룰 수 있다(즉, 그 존재를 증명할 수 있다). 이러한 의미에서 ZFC의 모형을 ZFC에서 '거의' 다룰 수 있다 (Kunen(1980), pp.133-134). 그러면, ZFC^{fin}의 모형들에 대한 얘기를 ZFC에서 구체적으로 어떻게 할 수 있나? 즉, 어떻게 형식화할 수 있는가?

ZFC에서 그것의 모형론에 대한 얘기(즉, 어떤 식이 어떤 집합에서 만족된다는 내용)를 하기 위해서는 '식'(formula) 개념과 그 식에 대한 '만족'(satisfaction) 개념에 대한 내용을 엄밀히 형식화해야 한다. 즉, 구문론과 의미론에 대한 형식화를 제시해야 한다. 대략적으로 그것은 다음과 같이 제시된다. ZFC는 집합들에 대한 이론이므로, ZFC 내에서 ZFC의 구문론을 형식화하기 위해서는 식들에 대한 얘기를 집합들로 제시해야 한다. 이것은 PA에 대한 산수화에서 1차 언어의 기호들에 괴델 수를 할당하는 내용과 유비되는 것으로 여기서는 ZFC의 식들에 대한 '집합화'를 제시해야 한다(즉

12) 3.4에서 자세히 살펴보겠지만 모형은 집합들 중에서도 어떤 특수한 구조적 패턴들을 가지는(예화하는) 집합들이다.

식들을 집합으로 코딩을 하는 것이다). 이러한 과정을 거쳐서 우리는 ZFC의 식 ϕ가 무엇인지를 나타내는 2항 술어 혹은 식 Fml($\ulcorner\phi\urcorner$, T)를 ZFC 내에서 정의할 수 있다. 여기서 $\ulcorner\phi\urcorner$는 ZFC의 임의의 식 ϕ를 집합으로 코딩한 것이고 T는 그 식을 원소로 가지는 이론을 나타낸다. 그 다음으로, 그 식이 어떤 집합에서 성립한다는 만족 개념을 ZFC에서 제시해야 한다. 어떤 식 ϕ가 집합 M에서 만족된다는 말은 할당 함수(혹은 논의 영역의 원소들의 열 (satisfaction sequence)) s가 존재해서 ϕ가 M에서 참이 되도록 M의 원소들이 할당된다는 말이다(<M, $\in$>$\vDash\phi$[s]). 집합 M과 할당 함수 s는 집합론적 개념이므로, 위의 내용은 자연스럽게 3항 술어 Sat(M, u, s)로 정의될 수 있다(u는 ϕ를 코딩한 것이다). 그러면 메타 이론적 내용인 모형론에 대한 기본적인 내용을 ZFC에서의 식들로 제시할 수가 있다. 이 경우에 Sat(M, u, s)은 식 ϕ의 해석을 M으로 제약(상대화)한 것과 마찬가지의 내용을 가진다.[13] 그래서 Sat(M, u, s) 대신에 좀 더 직관적인 '$\phi^{<M,\in>}$'(간단히, 'ϕ^{M}')으로 표기할 수 있다. 이러한 결과들이 주어졌을 때, 집합 모형의 존재와 관련해 중요한 것은 다음이다.

1.3에서 살펴봤듯이, 우리는 ZFC를 하면서 ZFC$\vdash\phi$인 ϕ에 대해 그것은 일반적으로 클래스 V에서 참인 것으로 간주한다. 그러면 기초(foundation)공리(에 함축되는 V=$\cup_{\alpha\in ON}$V$_\alpha$)에 의해 ϕ는 항상, V$_\alpha\subset$V인, 어떤 집합 V$_\alpha$에서 참이 된다. 이 경우에 우리는 항상 $\alpha\leq\beta$인 집합 V$_\beta$($\subset$V)을 찾을 수 있으므로 V$_\beta$는 ϕ에 대해서 (부분적인)집합들의 세계를 이룬다. 이러한 사실이 말하는 것은 V에서 성립하는 임의의 ϕ는 항상 그것보다 작은 집합 V$_\beta$에서 성립한다(reflect down)는 것이다. 이러한 사실은 ϕ의 유한 연언인 $\phi_1,\ldots,\phi_n$

13) ZF$\vdash\forall<M,\in>\forall x_1,\ldots,x_n(\phi^{<M,\in>}(x_1,\ldots,x_n)$ $\leftrightarrow$<M, $\in$>$\vDash$ $\ulcorner\phi\urcorner$ [<x_1,... x_n>]).(Kunen(1980), p.144)

(즉, ZFC^{fin})에 대해서도 마찬가지로 성립한다. 즉, $V_\beta \vDash \phi_1,...,\phi_n$. 이것은 위에서 살펴본 ZF에서 형식화된 만족 개념에 의해 $[\phi_1,...,\phi_n]^{V_\beta}$을 말하는 것이다. 즉, V에서 성립하는 것을 V_β로 제약(상대화)한 것과 같은 내용이다. 중요한 사실은 이러한 내용이 다음과 같이 정식화될 수 있고 그것이 ZFC에서 증명될 수 있다는 사실이다.[14)]

$$ZFC \vdash \forall_\alpha \exists_{\beta>\alpha} \forall x_1,...,x_k \in V_\beta([\phi_1,...,\phi_n]^{V_\beta} \leftrightarrow [\phi_1,...,\phi_n]^V)$$

이것은 1.3에서 언급한 (국소적)반사원리이다. 위에서 대략 서술한 것처럼 이것은, 직관적으로, 참인 $\phi_1,...,\phi_n$에 대해 우리가 그것이 성립하는 어떠한 집합(V_α)을 선택하든 마찬가지로 $\phi_1,...,\phi_n$이 성립하는 더 큰 집합 V_β가 존재한다는 말이다. 이것은 ZFC의 임의의 유한 부분인 $\phi_1,...,\phi_n$에 대해서 항상 집합 모형이 존재한다는 사실을 ZFC에서 한 도식(schema)으로 증명할 수 있다는 사실을 나타낸다. 그러면 우리는 이것에 대해 선택 공리(혹은 스콜렘 함수)를 적용하여 다음의 사실을 ZFC에서 보일 수 있다.

$$ZFC \vdash \forall X \subset V_\beta \exists A \ [X \subset A \subset V_\beta \ \wedge \ ([\phi_1,...,\phi_n]^{V_\beta} \leftrightarrow [\phi_1,...,\phi_n]^A) \wedge \ \mathrm{denu}(A)]$$

이러한 사실들에 의해 ZFC에서 ZFC^{fin}(즉, $\phi_1,...,\phi_n$)의 열거가능한 모형 A를 얻을 수 있다.[15)] 즉, 우리는 ZFC에서 ZFC의 모형에

14) 이러한 직관적인 거친 서술과 달리 이것에 대한 엄밀한 증명은 훨씬 복잡하다. 구체적인 내용은 Jech(2000), pp168-8이나 Kunen(1980), pp136-7을 참조하시오.

15) 엄밀히 말하면, 이것에 대해서 모스톱스키 붕괴(collapsing) 정리를 적용하여 이행적인 열거가능한 모형의 존재를 증명하는 것이 온전한 결과가 될 것이다 (Kunen(1980), p.139-140).

준하는 임의의 ZFC^{fin}에 대한 집합 모형들(열거가능 모형을 포함한)의 존재를 증명할 수 있다. 그러면, ZFC에서 그것의 모형들에 대한 내용을 V_{β}와 A를 통해서 거의 다룰 수 있어서 1.1에서 살펴본 <¬denu> 개념에 대한 ZFC의 구분불가능성 논변을 ZFC에서 '거의' 그대로 제시할 수 있다. 즉, ZFC에서 ZFC^{fin}의 모형들을 다룰 수 있고 그것들에 상대적으로 각각 다르게 제시되는(즉, 각각 다른 집합으로 제약되는) PN이나 <¬denu>의 의미를 ZFC를 통해서 거의 구분할 수 있다.

이러한 생각이 뭔가 온전하지 않은 해법으로 생각될 수도 있지만 반드시 그렇지만은 않다. 먼저, '¬denu(PN)'와 같은 문장 ψ에 대한 ZFC에서의 증명(ZFC$\vdash\psi$)은 유한하기 때문에 항상 어떤 유한 $\phi_1,..,\phi_n$(⊆ZFC)에 대해 $\phi_1,..,\phi_n \vdash \psi$가 성립한다. 그러면 건전성에 의해 $\phi_1,..,\phi_n \vDash \psi$ 이다. 이 말은 ZFC의 (모든)모형에서 성립하는 ψ에 대해서 그것은 항상 어떤 유한 $\phi_1,..,\phi_n$(⊆ZFC)의 모형에서 성립한다는 얘기를 하는 것이다. 이 경우에 우리는 $\phi_1,..,\phi_n$을 포함하는 임의의 ZFC^{fin}를 항상 구성할 수 있다. 그러면 ZFC의 모형에서 성립하는 임의의 ψ는 항상 ZFC^{fin}에서 성립한다(역방향은 사소하게 성립). 즉, ZFC와 ZFC^{fin}은 모형론적으로 동치이다(ZFC $\vDash\psi$ ↔ $ZFC^{fin}\vDash\psi$). 그래서 ZFC의 모형에서 성립하는 사실은 항상 ZFC^{fin}의 모형에서 성립하는 사실로 바꿔서 얘기할 수 있다.[16] 다른 측면에서 생각해보면, ZFC는 일차 이론이기 때문에 위와 같이 임의의 ZFC^{fin}에 대해서 모형을 구성할 수 있으면 조밀성(이론 T가 유한하게 만족가능하면 T 역시 만족가능하다)에 의해 무한

16) 대표적인 사례로 코헨(Cohen, (1966))의 연속체 가설의 독립성 증명을 들 수 있다. ¬CH가 성립하는 ZFC의 모형의 존재를 의도하면서 코헨이 사용한 방법은 ZFC^{fin}+¬CH(Con(ZFC)의 가정하에서)의 모형을 구성하는 방식으로 그러한 결과를 보인다. 이것은 위의 생각이 효과적이라는 생각에 대한 간접적 증거가 될 것이다.

ZFC의 모형에 대한 존재주장(ZFC에서 증명할 수는 없지만)과 동치인 그러한 내용을 증명하는 셈이다. 이러한 의미에서 ZFC^{fin}의 모형을 다룰 수 있다면 ‘거의’ ZFC 자체의 모형을 다루는 효과를 가질 수 있다.[17] 그러므로, 우리는 ZFC를 통해서 그것의 표준 모형과 비표준 모형들을 다루는 것에 준하는 내용들을 서술할 수 있어서 PN^{M_1}과 PN^{M_2}(또는 $\neg denu^{M_1}$과 $\neg denu^{M_2}$)를 ZFC에서 구분하는 것과 동치의 효과를 얻을 수 있다.

지금까지 살펴본 내용들은 ZFC가 임의의 형식 이론 T의 모형론을 형식화할 수 있다는 사실에 기반한 것이다. 이것은 ZFC가 모든 이론에 대한 해석이 될 수 있다는 사실을 보여주는 것으로 이러한 점에서 ZFC는 형식적으로 모든 것에 대한 이론이라고 간주할 수 있고 또 이러한 의미에서 ZFC는 한 개별 이론이면서 보편 이론적 성질을 가진다고 볼 수 있다. 즉, 위의 논변들은 ZFC의 이러한 보편 이론적 성질에 기반한 논변들이라는 사실을 알 수 있을 것이다.

3. 열거불가능성과 양화사: 맥락의존성과 논리적 성질

상대성 이슈와 관련하여 ZFC는 위에서 살펴본 보편이론적 성질 외에 다른 중요한 성질을 갖고 있다. 그것은 ZFC가 양화언어라는 것이다. 특히, 우리가 주목하고 있는 ‘¬denu(x)’ 술어는 한 양화식이다(사실 모든 집합 표현은 전부 양화식으로 나타내어진다). 나는 아래에서 양화 개념 혹은 양화사의 중요한 특징(들)에 기반한 또 다른 해소 논변을제시할 것이다.

17) 위의 내용은, 잘 알려진, 조밀성의 두 측면에 대한 내용이다.

3.1. 양화사의 맥락의존성

논변을 위해 '¬denu(x)'술어의 정의를 다시 생각해보자. 그것은 다음과 같다. $\neg\exists f(f:\omega \xrightarrow[onto]{1:1} x)$. 이러한 존재양화의 부정식이 서로 다른 두 모형에서 만족(참이)되는 경우에 두 모형에서 다르게 해석된 열거불가능성 개념 $\langle\neg denu^{M_1}\rangle$과 $\langle\neg denu^{M_2}\rangle$에 대한 차이는 양화 영역에 대한 차이로 설명할 수 있다(함수와 ω는 절대적이다).[18] 이 경우에 한 표현에 대해 어떻게 두 다른 도메인이 결정되고 또 어떻게 똑같이 참이 될 수 있나? 이것을 위해 이러한 상대성 문제와 같은 논리적 구조를 가지면서 좀 더 직관적인 다음의 예를 살펴보자.

예를 들어, K 대학에는 농구부가 결성되어 있고 거기에는 그 대학에서 키가 큰 순서로 선별되어서 팀이 꾸려져 있는 상황을 생각해보자. 그 팀의 주장(c)은 농구부에서 가장 키가 큰 사람이 맡는 상황을 가정해보자. 그리고 이러한 상황은 과거부터 앞으로도 계속된다고 가정해보자. 그러면 'c는 K 대학 농구부에서 가장 키가 크다'는 문장 S는 참이 된다. S는 간단히 다음과 같은 양화 문장 '$\neg\exists x(cTx)$'으로 나타낼 수 있다(yTx: K 대학 농구부에서 x가 y보다 키가 크다). 마지막으로, 이러한 상황을 잘 아는 10년 전에 졸업한 A와 현재의 B는 각자 자기가 다니던 시절을 생각하면서 S를 참으

18) 함수와 ω 개념이 절대적이라는 말은 그것들의 의미가 모형들 사이에서 고정된다는 말이다. 이러한 방식의 설명은 P(ω)에 대해서도 마찬가지로 적용된다. P(ω)는 멱집합 공리($\forall z\exists y\forall x(x\in y \leftrightarrow x\subseteq z)$)에 의해 정의되는 양화식의 축약으로 나타낼 수 있다. 이 경우에 원소관계와 부분집합 관계가 절대적이기 때문에 M_1, M_2 사이에서의 차이는 양화 도메인의 차이라고 설명될 수 있다. 그러므로 이 경우에도 두 모형에서의 PN에 대한 내용 차이는 양화 영역에 대한 차이이다. 이에 대한 구체적인 내용은 (Kunen(1980), ch.4)에 제시된다.

로 받아들인다고 가정해보자. 이 경우에 A와 B가 고려하는 세부적인 내용은 c와 양화 변항이 적용되는 양화 영역(D^A, D^B)에서 차이가 날 수 있다. 그래서 A가 의도하는 c는 D^B에서는 가장 크지 않을 수도 있다(반대의 경우도 가능하다). 이 경우에 c 역시 양화 영역에 의존하기 때문에 결과적으로 'c는 K대학 농구부에서 가장 키가 크다'도 '¬denu(P(ω))'의 경우와 마찬가지로 두 다른 상황(모형)에서 똑같이 참이 되면서 둘이 가지는 내용적 차이는 양화 영역에 대한 차이라고 말할 수 있다. 즉, <y는 K대학 농구부에서 키가 가장 크다>는 개념을 나타내는 술어 '¬∃x(yTx)'은 '¬denu(x)'와 같은 논리적 구조를 가진다. 그래서 이 경우에 어떻게 각각의 양화영역이 결정되고 거기에서 어떻게 똑같이 참이 되는지에 대한 대답을 고려하는 것이 스콜렘 상대성과 관련된 문제에 대한 한 힌트를 준다. 먼저, 이 경우에 어떻게 각각의 양화영역이 결정되는가? 이것을 위해서 우리는 양화사에 대한 (메타)의미론적 고려를 할 필요가 있다.

'모든'(혹은 '존재한다')과 같은 양화 표현에 대한 양화 영역의 결정은 양화사에 그러한 영역을 할당하는 것이고 이러한 점에서 그것은, 느슨한 의미에서, 양화사의 의미를 제시하는 것이라고 볼 수 있다. 그래서 바로 위 단락의 물음에 대해서 알아보기 위해서 우리는 양화사를 포함하는 양화 표현의 의미가 일반적으로 어떻게 주어지는지를 고려할 필요가 있다. 이와 관련해 중요한 사실은 일반적으로 양화 표현('모든', '존재한다', '대부분의' 등과 같은)들은, 지표적(indexical) 표현은 아니지만, 그 의미가 맥락 의존적으로 주어진다는 사실이다(Peters, S and Westerstahl, D(2006), p. 42).[19] 그

---

19) 이론의 표현들에 대해서 그것들의 적절한 의미가 그것(정보들)에 상대적으로 결정되는 공통의 정보나 내용들을 우리는 간단하게 '맥락'이라고 규정할 수 있다. 그러한 정보들은 그 이론을 하는 상황에서 우리에게 두드러진 혹은 우리가 (암묵적으로)주목하는 내용들이다. 맥락 개념 자체에 대한 철학적 내

래서 '논의 영역'이라고도 불리는 양화 영역은 말 그대로 논의의 맥락에 따라 그 내용(원소들, 양화영역의 크기 등)이 달라질 수 있다. 즉, 양화사는 맥락의존적 성질을 가진다. 지금의 문제와 관련하여 양화사의 맥락의존성이 말해주는 중요한 사실은 양화영역은 각각이 주목하는 맥락에 따라 결정된다는 사실이다.

3.2. 양화사의 논리적 성격(논리 상항으로서 양화사)

그 다음으로 중요하게 고려해야할 한 사실은 일반적으로 양화사는 논리 상항으로 간주된다는 사실이다. 즉, 모든 모형에서 그 의미가 고정되는 논리상항으로 간주된다는 것이다. 예를 들어, 크기가 다른 두 모형 M_1, M_2에서 양화 문장 $\forall_x Px$가 만족된다는 사실은 두 모형에서 Px가 양화 영역의 차이에 상관없이 공통적인 방식으로 각 양화 영역 D^{M_1}, D^{M_2}의 모든 d에 대해서 만족된다는 것을 나타낸다. 이러한 논리 상항으로서 양화사의 의미에 의해 $\forall_x Px$의 의미론적 내용인 진리 조건은 두 모형에서 같게 된다. 이러한 설명 방식에 의해 위의 예에서 A와 B는 '키가 가장 크다'라는 술어에 대해 다른 양화 영역에서도 같은 진리 값을 가진다. 지금까지의 내용을 요약하자면, 양화영역의 결정은 맥락에 의해 결정되는 것으로 그것은 맥락에 따라 얼마든지 달라질 수 있지만, 두 다른 (양화) 영역에서 똑같은 표현이 참이 되는(같은 의미론적 값을 갖는) 이유는 양화사의 논리적 성격에 의해서 그러한 것이라고 설명할 수 있다. 이러한 사실은 스콜렘 상대성에 대해서도 마찬가지로 적용해볼 수 있다.

스콜렘 상대성은 거기서 핵심적 요소인 양화 영역의 변화에 주

용들은 Stalnaker (1993)을 참조하시오.

목하여 다음과 같이 재 서술할 수 있다. 양화사의 논리적 성격에 의해 양화문장의 진리 값이 모든 모형에서 고정되는 상황에서 양화 영역에 대한 결정은 양화 문장이나 양화 식(술어) 자체에 이미 결정되어 있는 것이 아니라, 각각의 맥락에 따라 얼마든지 다르게 결정될 수 있는 것이다. 이러한 설명을 '¬denu(x)'에 적용하면 다음과 같이 설명될 수 있다. 1.1에서 살펴본 M_1, M_2에서 '¬denu(x)'이 (양화사의 논리적 성격에 의해)똑같이 만족되는 상황에서, 양화 영역은 집합론을 하는 각각의 맥락에 따라 결정된다. 우리는 일반적으로 집합론을 하는 경우에 양화 도메인은 일관적인 한에서 어떤 제약을 고려하지 않는다. 적어도 (모호하지만)충분히 확장된 그러한 양화 영역을 암묵적으로 전제하고 주목한다. 그러한 주목이 하나의 논의의 맥락이고 그 맥락에 따라 무제약적인 양화 영역이나 최소한 $|M_1|$ 과 같은 것이 양화영역으로 결정된다. 반면에, 예를 들어, 연역적 효율성이나 편리성에 주목하는 맥락이나 어떤 철학적 전제를 하는 맥락에서는 위와 같은 너무 커서 다루기 힘든 영역이 아닌 제약된 $|M_2|$와 같은 영역에 주목하고 그러한 집합이 양화 영역으로 결정된다. 구체적인 한 예로, LST의 증명에서처럼 우리가 그 이론의 각 표현들에 대응되는 것들 혹은 이름을 가지는 것들(즉, 증명이나 논증에서 언급할 필요가 있는 것들)만으로 이루어진 모형에 주목하는 맥락에서 $|M_2|$과 같은 것들이 양화 영역으로 결정된다.

위의 논변들을 통해서 우리는 다음의 결론에 이른다. ZFC가 고유한 모형을 결정하지 못한다는 구분불가능성(혹은 미결정성) 문제와 관련하여 핵심적인 것은 '¬denu(x)' 술어의 양화 영역의 결정문제인데, 논리상항으로서 양화사에 대한 양화 영역의 결정은 그 표현 자체(또는 그것을 포함하는 ZFC)가 책임을 지는 것이 아니라, 언어 외적인 요소인 (이론을 하는)맥락에 의해 결정되는 것이다. 이러한 사실에 의해 ZFC의 모형들 역시 그 공리들이 고유하게 결정

해야할 책임을 가지는 것이 아니라고 결론을 내릴 수 있다. 이러한 사실은 2차 이론인 ZF2에 대해서도 마찬가지로 적용될 수 있다. ZF2의 경우에 그것은 ZF의 모든 공리들이 표준적인 방식으로 성립하는 도달불능 기수(inaccessible cardinal)에서 모든 모형들이 동형이다(almost categorical). 그러나 그렇게 간주될 수 있는 이유는 그 모형이나 양화 영역이 그 언어 자체를 통해서(즉, 구문론적인 수단에 의해) 그렇게 결정되기 때문에 그러한 것이 아니라 그것을 의도된 것으로 해석하는, 언어 외적인, 우리의 주목 혹은 맥락적 고려에 의해 그러한 결정이 이루어지는 것이다. 예를 들어, ZF2의 경우에도 그 양화 영역 혹은 모형으로 비표준적인 헨킨(Henkin) 모형이 얼마든지 고려될 수 있다. 이러한 맥락 의존성은 비단 양화사뿐만 아니라 다른 논리상항에 대한 해석에서도 얼마든지 발생할 수 있다. 예를 들어, 양화사를 포함한 논리상항에 대한 해석에서 구성주의의 맥락에서는 그것들이 일반적으로 간주되는 고전적 방식과 다르게 의미가 결정될 수 있다. 즉, 이론을 하는 맥락에 따라서 얼마든지 다양하게 맥락 의존적으로 의미가 변할 수 있다. 따라서 이러한 논변들에 의해 우리는 위에서 고려한 문제인 구분불가능성이나 미결정성 문제에 대해 그것이 ZFC가 직접적으로 책임을 져야하는 문제가 아니라는 방식으로 결론을 내릴 수 있다.

4. 비표준 모형과 <¬denu> 개념의 구조적 패턴

마지막으로, 나는 지금까지 살펴본 두 논변들과 다른 측면에서 ZFC의 구분불가능성 문제에 대한 해소 논변을 제시하려고 한다. 위의 두 논변들을 다시 생각해보면 그것들은 각각 ZFC의 보편 이론적 특징과 양화언어로서 ZFC의(혹은 '¬denu(x)' 술어의) 맥락의존성을 통한 논변들이다. 이러한 점에서 그것들은 언어적 측면에서

제시된 논변들이라고 볼 수 있다. 이후에 제시될 논변은 위의 것들과는 다른 측면인, 좀 더 근본적인, 집합 개념 자체에 대한 고려를 통한 논변이다.

4.1 수에 대한 미결정성 논변과 구조적 패턴

1.2에서의 게티어 상황과 위의 두 해소 논변들을 잘 생각해보면 그것들은 비표준 모형(그리고 그에 따른 비표준적 열거불가능성 개념)을 문제의 핵심으로 전제하고 있다. 그래서 어떤 사람들은 그러한 문제와 관련하여 우선적으로 비표준 모형이나 비표준적인 기수 개념들을 배제하려는 생각을 할 수도 있을 것이다. 이러한 생각은 대표적으로 베나세라프(Benacerraf(1985))의 고전적 논문에서 대략적으로 나타난다.[20] 이러한 생각을 전제로 베나세라프는 '∈'을 원소 관계로 해석하고 멱 집합의 양화 영역이 충분히 확장된 것들이 되도록 모형들의 자격을 제한하는 방식으로 상대성의 해소 논변을 제시한다(스콜렘 역설에 대해서도 같은 생각을 적용한다). 즉, 열거가능한 양화 영역을 가진 비표준 모형이 ZFC의 열거불가능성 개념에 대한 의미론의 역할을 하지 않도록 하려는 생각이다. 그러나 나는 다음의 이유에서 이러한 생각에 반대한다. 우리가 집합 개념의

---

20) "보편 양화사는 모든 것 또는 적어도 모든 집합들을 의미해야 한다. 또는 적어도 그것은 양의정수들의 집합의 충분히 많은 부분집합들을 포함할 정도로 충분히 넓은 도메인에 대해 양화해야 한다."(Benacerraf(1985), p.103)

"우리가 스콜렘 역설을 가지지 않는 이유는 그리고 집합론적 개념들이 스콜렘의 의미에서 상대적인 것이 아닌 이유는 집합론을 모형론적으로 다루어야 할 이유가 없기 때문이다......... 집합론적 진술들이 말하는 것을 단순히 그 이론의 모든 고전적인 모형들(즉, 입실론에 대해 공리를 만족시키는 어떠한 이항 관계로 할당될 수 있도록 허용하는 모형들) 사이에서 일정한 것과 동일시 될 수 없다."(Benacerraf(1985), p.108)

한 중요한 성질(모든 수학적 구조를 집합으로 나타낼 수 있다는)을 잘 생각해보면 비표준 모형이나 비표준적인 기수 개념들이 문제적 요소이거나 배제해야 할 것들이 아니라, 열거불가능성 개념의 의미와 관련하여 중요한 사실을 나타내 준다는 것을 확인할 수 있을 것이다. 나는 아래서 이러한 사실을 논증할 것이다. 이러한 논변에 의해 우리는 ZFC와 관련하여 스콜렘 상대성을 인정하면서도 1.2의 게티어 상황 같은 구불불가능성 문제를 가지지 않는다는 것을 확인할 수 있을 것이다. 이러한 논변들을 위해서 나는 먼저 기초론의 논의에서 집합론적 정의와 관련된 문제들을 살펴볼 것이다.

잘 알려져 있듯이 프레게(Frege, G)로부터 시작된 기초론의 논의에서 수는 여러 가지 방식으로 정의되어 왔다. 예를 들어, 프레게의 개념의 외연을 비롯해 러셀의 수적 양화사(numerical quantifier) 그리고 제르멜로, 폰 노이만의 집합론적 정의들이 그것들이다(Bostok(2009), ch.5). 그 정의들에서 알 수 있듯이 그것들은 전부 다른 내용을 가진다. 수가 고유한 대상이고 제시된 정의들이 대상적 차원에서의 환원적 정의로 간주된다면 우리는 자연스럽게 위의 정의들 중에서 올바른 하나의 환원이 존재할 것이라는 생각을 할 수 있을 것이다. 논의의 단순성을 위해 제르멜로와 폰 노이만의 정의로 제한해서 생각해보자. 즉, 유명한 베나세라프의 문제(Benacerra(1967))로 논의를 국한시켜서 생각해보자. 그것은 다음과 같이 간략히 서술될 수 있다. (자연)수를, 환원적 의미에서, 집합으로 정의하려는 기초론의 논의에서 예를 들어, 자연수 2는 두 가지 방식으로 정의될 수 있다. 먼저, 일반적으로 많이 사용되는 폰 노이만 방식인 $\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$을 들 수 있다. 그리고 다른 방식으로 제르멜로 방식인 $\{\{\emptyset\}\}$을 들 수 있다. 이러한 정의가 대상으로써 수에 대한 동일성을 말해주는 환원적 정의라면 둘 중 하나가 올바른 정의(환원)가 되어야 할 것이다. 그러나 우리가 잘 알고 있듯이 그

둘이 전부 잘 작동하기 때문에, 기술적인 혹은 서술의 편리성을 제외하고는, 형이상학적 측면에서도 의미론적 측면에서도 뭐가 더 낫다는 결정을 할 수가 없다. 즉, 그 두 정의가 수학적으로 동등한 역할을 하기 때문에, 뭐가 올바른 정의인지 결정할 수 없게 된다. 이러한 생각은 조금만 생각해보면 1.1에서 살펴본 미결정(구분불가능성)과 유사한 논변 구조를 가진다는 것을 알 수 있을 것이다.

1.1에서의 미결정성 논변을 다시 생각해보자. ‘PN’의 지시체에 대한 미결정성 문제를 생각해보면, 모형론적 의미론이 전제되었을 때, ‘PN’에 대해서 서로 다른 두 모형(M_1, M_2)에서 다른 의미(PN^{M_1}, PN^{M_2})가 할당됨에도 ‘¬denu(PN)’ 문장을 똑같이 참으로 만들기 때문에 ZFC를 통해서는 그 둘 중에 뭐가 올바른 지시체인지(의미인지)를 고정 혹은 결정할 수 없다는 문제이다. 이번엔 수에 대한 미결정성 논변을 살펴보자. 위에서 살펴본 수 2에 대한 집합론적 정의들은 일종의 집합론적 모형을 제시하는 작업으로 간주될 수 있어서, 위의 두 정의들은 수 2를 포함하는 자연수 개념에 대한 제르멜로 모형과 폰 노이만 모형 이 두 가지 경우를 고려하는 상황으로 이해할 수 있다. 이 경우에 제르멜로 집합($\{\{\emptyset\}\}$)과 폰 노이만 집합($\{\emptyset, \{\emptyset\}\}$) 둘 다 수 2에 대한 문장을 똑같이 참으로 만들수 있기 때문에 우리는 어떤 대상이 수 2의 집합론적 의미인지 결정할 수 없다. 이러한 의미에서 수에 대한 미결정성 상황은 ZFC의 ‘PN’에 대한 미결정성과 같은 구조를 가진다고 볼 수 있다. 아래에서 나는 수에 대한 미결정성 논변에 대한 베나세라프의 한 해소 논변을 고려한 후에 그와 유사한 방식을 ZFC의 구분불가능성 문제에도 적용해 보려고 한다. 이것을 위해서 먼저 베나세라프의 고전적인 논변을 살펴보자.

위에서 봤듯이 제르멜로와 폰 노이만 집합 둘 다 수 2에 대한 환원적 정의로 잘 작동하기 때문에. 우리는 둘 중에 어떤 것이 수

2에 대한 올바른 환원이라고 결정할 수가 없다. 이것으로부터 베나세라프는 다음의 결론에 이른다. 먼저, 위의 논변에 의해 수는 집합으로 환원될 수 없다.[21] 더 나아가, 수 2는 자연수 구조와 독립적으로 그것의 동일성(혹은 존재)를 확인할 방법이 없기 때문에 그것은 진정한 대상이 아니다. 따라서 수 2의 의미는 (구조)독립적이고 고유한 대상에 의해서 주어지는 것이 아니라, 자연수 구조에서의 관계 역할에 의해 의미가 주어진다. 이러한 생각을 액면 그대로 받아들이건 그렇지 않건 위의 논변에 의해 일단, 집합론적 정의가 동일성과 관련된 환원적 정의가 아니라는 것은 그럴듯해 보인다. 그러면 그 정의들의 성격은 의미론적으로 어떻게 적절히 설명될 수 있는가? 즉, 환원 관계가 아니라면 그것은 어떤 관계인가? 나는 우리가 기초론을 하면서 자연수에 대한 집합론적 정의들을 제시할 때 어떤 사실을 우선적으로 중요하게 확인하는지를 생각해보면 이것에 대한 적절한 대답을 할 수 있다고 생각한다.

예를 들어, 서술의 편의상, 폰 노이만 방식의 정의를 생각해보면 그러한 정의가 제시되고 중요하게 고려(증명)되는 것은 다음의 사실이다. 자연수의 정의로 제시된 집합 i, j에 대해 $i < j \rightarrow i + 1 \leq j$(Drake, (1996), p. 75). 이것은 i, j들로 이루어진 집합(혹은 구조)이 디스크릿(discrete)한 구조적 성질을 가진다는 것을 나타낸다.[22] 이것은 자연수(집합의)의 특징인 디스크릿한 구조적 내용(또는 패턴)을 집합론적 정의가 잘 반영하고 있다는 사실이다. 이러한 내용은, 서술 방식은 좀 더 까다롭겠지만, 당연히 제르멜로의 정의

21) 수를 논리적 대상으로 간주했던 프레게도 개념의 외연으로 수를 정의하면서 그것을 존재론적인 환원으로 생각하지는 않은 것처럼 보인다(Frege(1980), §107). 나는 이것을 Maddy(2011), p.87을 통해서 알게 되었다.

22) 어떤 집합이 '디스크릿하다'는 말은 그것의 가장 작은 원소와 큰 원소(그것이 존재하는 경우에)를 제외하고 각각의 모든 원소들이 유일한 전자(predecessor)와 후자(successor)를 가진다는 것을 의미한다(Cook(2009), p.94).

에 대해서도 마찬가지로 성립한다. 이러한 사실들은 자연수의 구조적 내용이 두 집합들에 공통적으로 적용된다는 사실을 나타낸다. 그러므로 이러한 사실들에 의해 집합론적 정의들은 환원적 관계가 아니라 자연수의 구조적 내용을 공통적으로 예화 하는(혹은 적용되는) 것이라고 설명할 수 있을 것이다. 같은 구조적 내용을 다양한 대상으로(혹은 방식으로) 예화 할 수 있음은 전혀 문제될 사항이 아니다. 이러한 설명 하에서 두 정의는 의미론적으로 차이가 없는 동등한 것으로, 그것들과 관련하여 수 개념의 의미에 대한 미결정성 문제는 발생하지 않는다. 나는 이러한 설명 방식이 위와 같은 문제의식에 대한 가장 적절한 설명 방식이라고 생각한다.[23]

집합론적 정의(해석)와 관련하여 수 개념의 의미가 그 집합들이 예화하는(혹은 적용되는) 구조적 패턴에 의해 주어질 수 있다는 또 다른 예로 다음의 논변을 생각해볼 수 있다. 이번에는 위와는 반대로, 동일한 대상(수)에 대해서 서로 다른 구조적 패턴이 적용될 수 있어서 그 의미 다르게 주어질 수 있는 상황을 고려해보자. 위에서 살펴본 것처럼 기초론의 맥락에서 자연수 2는 일반적으로 유한 집합으로 정의된다. 그러면서 다른 한편으로, 자연수는 유리수의 부분집합이기 때문에, 그것은 유리수이기도 하다. 양의 유리수로 제한해서 생각해보면, 개별 유리수는 자연수들의 비율로 나타낼 수 있기

23) 나는 이러한 설명 방식이 유사한 다른 정의들에 대해서도 마찬가지로 잘 적용될 수 있다고 생각한다. 예들 들어, 순서쌍(ordered pair)에 대한 집합론적 정의들을 생각해보면 그것은 구라톱스키(Kuratowski) 방식과 부르바키(Bourbaki) 방식 이렇게 두 가지가 동등하게 잘 작동한다. 즉, 동일한 순서 구조의 내용을 서로 다른 집합들이 공통적으로 예화 한다고 설명할 수 있다. 즉, 그 순서 구조의 내용에 대한 정보를 두 정의(집합)가 공통적으로 가지고 있다고 설명할 수 있다. 메타이론에 대한 코딩(coding) 작업에서도 마찬가지다. 괴델의 산수화를 예로 생각해보면 괴델의 원래 방식과 이후에 크립키(Kripke) 등의 개선된 여러 방식들이 존재하지만 그것들은 전부 구문론의 공통적인 구조적 내용들에 대한 다양한 예화들이라고 볼 수 있다.

때문에, 같은 비율의 경우를 고려하여, 그것은 두 자연수 간의 비율을 나타내는 순서쌍들의 동치 집합으로 정의 된다($\langle p, q\rangle \sim_{Q} \langle p', q'\rangle$ iff $\langle p, q\rangle \equiv \langle p', q'\rangle$, $\{\langle p, q\rangle\}_{\sim Q} =\mathrm{df}\ \{\langle p', q'\rangle \in Z \times Z \mid \langle p', q'\rangle \sim_{Q} \langle p, q\rangle\}$). 그래서 한 유리수는 자연수 순서쌍들의 무한 집합으로 정의된다.[24] 이 경우에 우리가 수 2를 고유한 대상이라고 간주하고 집합론적 정의를 환원적 의미를 나타내주는 것으로 간주한다면, 동일한 수 2에 대해서 그 의미가 유한 집합(자연수)과 무한 집합(유리수) 이 두 가지로 동시에 주어지는 문제적 상황이 발생하게 된다. 당연히 한 대상이 무한 집합이면서 유한 집합일 수 없다. 그리고 유리수에 대한 정의 역시 올바른 정의이기 때문에, 집합론적 정의를 환원적 정의라고 간주한다면, 베나세라프 문제와는 다른 방식으로, 수 2가 어떤 집합인지 결정해야 하는 상황이 발생하게 된다. 이것 또한 베나세라프 문제와 유사한 일종의 미결정성 문제이다. 이러한 상황에 대해서도 위와 마찬가지로 대답을 할 수 있다.

우리가 잘 알고 있듯이, 유리수는 자연수 구조와는 달리 어떠한 두 유리수 사이에도 또 다른 유리수가 존재하는 덴스(dense)한 구조적 성질을 갖는다. 위에서 제시된 유리수에 대한 정의는 바로 이러한 구조적 성질을 만족시키도록 정의된 것이다(Abian(1965), ch.6). 즉, 유리수에 대한 집합론적 정의는 바로 그러한 덴스한 구조적 패턴을 만족시키는 방식으로 제시된 것으로, 이러한 집합론적 정의에서 유리수 개념(즉, 유리수로서 수 2의 의미)은 그러한 구조적 패턴(혹은 그 패턴에서의 한 역할)을 예화 하는 방식으로 주어진다. 이러한 사실에 의해 유리수는 자연수의 디스크릿한 구조적 패턴과는 전혀 다른 구조적 성질을 가진다. 이러한 사실이 나타내

24) 유리수에 대한 집합론적 정의 역시 자연수에 대한 정의들처럼 다양한 방식으로 제시될 수도 있다(Drake(1996), pp.87-88).

는 것은 구조적 패턴을 반영(예화)하는 집합론적 정의에서 수 2의 의미는, 유리수 구조에 주목하는 맥락과 자연수 구조에 주목하는 맥락에 따라, 서로 다른 구조적 패턴이 적용되어 얼마든지 다르게 주어질 수 있다는 사실이다.[25] 즉, 한 대상에 서로 다른 구조적 내용이 적용될 수 있음은 전혀 문제가 되는 상황이 아니다. 그리고 이러한 사실들에 의해 유리수 집합과 자연수 집합이 집합 자체로는 그 크기는 같다고 해도(더 나아가, 동형 함수를 정의할 수 있음에도) 그것들이 참으로 만드는 문장들이 다르게 되고 이러한 의미에서 전혀 다른 의미론적 내용을 가질 수 있다. 그러므로 위에서 고려한 자연수(유한 집합)로서 그리고 유리수(무한 집합)로서 수 2에 대한 서로 다른 집합론적 정의는 의미에 관한 미결정성을 전혀 발생시키지 않는다. 이와 같이 집합론적 정의가 대상적 차원에서의 환원이 아니라, 구조적 패턴의 예화라는 설명에 의해 미결정성 문제들은 해소될 수 있다.[26] 일견, 미결정성의 문제처럼 보였던 상황

---

25) 유리수 2와 자연수 2가 다른 대상이라고 간주하는 입장도 있을 수 있을 것이다. 이러한 생각은 나의 설명과 충돌하지 않는다. 그러한 생각 자체도 이미 구조적 차이에 의해 그 둘을 다른 대상으로 간주하는 것이기 때문에 이러한 생각은 구조적 패턴, 내용이 의미론적 역할을 한다는 생각에 대한 또 다른 설명이 된다.

26) 위에서도 잠깐 언급했지만, 위의 논변이 반드시 베나세라프의 구조주의 논지를 전제해야 하는 것은 아니다. 즉, 수가 단지 구조에서의 위치(를 예화하는 역할)로서만 의미를 갖는다고 생각할 필요는 없다. 위의 논변들의 핵심은 집합론적 정의(해석)와 관련하여 집합들이 수의 구조적 패턴들을 예화하고 있다는 사실이다. 이러한 생각은 고유한 대상으로서, 그것이 뭐가 되었든, 수의 존재를 얼마든지 받아들일 수도 있다(여기서의 논의와 일관적일 수 있다). 그래서 그러한 고유한 대상을 인정하고 그것들로 이루어진 수들의 세계가 얼마든지 이론 독립적 혹은 구조 독립적으로 존재할 수도 있다. 그럼에도 그러한 상황에서 수들의 모임은 그 자체로 대상들의 복합체이고 우리는 그것들로부터 구조적 패턴을 추상화할 수 있다. 즉, 수들의 모임(집합)은 구조적 성질을 갖기 마련이고 우리가 수학이론을 하면서 개념의 의미로 이해하고 주목하는 것은 그것의 형이상학적 성질이 아니라 그것이 나타내는 구조적 내용들이라고 볼 수 있다. 구조는 전형적으로 집합론적 방식으로 잘 포착되기 때문에,

에 대한 이러한 의미론적 설명이 주어졌을 때, 우리는 이것을 <¬denu> 개념과 관련된 문제에 대해서도 적용해볼 수 있다. 이를 위해 나는 아래에서 <¬denu> 개념의 구조적 패턴이 무엇이고 그것이 어떻게 열거가능한 집합(PN^{M_2})을 통해서 예화 될 수 있는지를 살펴볼 것이다.

4.2 열거불가능성 개념의 구조적 패턴과 그 예화

무한 집합 S가 열거가능하다는 말의 의미는 무엇인가? S가 열거가능하다는 말은 그것을 열거하는 함수(f_{denu})가 존재한다는 말이다. f_{denu}는 N에서 S로 가는 1:1onto함수이다. 이 말은 f_{denu}가 S에 대해 그것의 원소들을 전부 n(∈N)으로 인덱스(index)를 부여할 수 있다는 것을 나타낸다. 그렇게 인덱스를 부여할 수 있다는 말은 S의 원소들이 그 인덱스를 따라 배열될 수 있다는 말과 같다. '배열될 수 있다'는 말은 집합론적으로 어떤 배열에 대한 양화를 하는 것이라고 볼 수 있다. 그러면 이러한 사실들에 의해 S가 열거가능하다는 말은 S의 모든 원소들이 각각 어떤 n 번째에 나타나는 방식으로 배열된(즉, 열거된) 어떤 배열 A_n이 존재한다는 방식으로 설명될 수 있다. 그러면, 반대로, 집합 S가 열거불가능하다는 말은 그것에 대해 f_{denu}가 존재하지 않는다는 것으로 S가 n(∈N)을 인덱스로 하여 배열될 수 없다는 말이다. 위의 배열에 대한 언급을 생각하면, 이 말은 S의 각 원소들이 어떤 n 번째에 나타나는 방식으로 배열된 그러한 배열 A_n이 존재하지 않는다는 말이다. 즉, 이 말

자연스럽게 집합론적 정의는 그러한 구조적 패턴을 예화 하는 방식으로 수 개념의 의미를 나타낸다고 설명할 수 있다. 이 경우에 집합론적 정의는, 대상적 측면에서 보자면, 집합들이 항상 수들의 의미를 대신할 수 있다는 사실을 나타낼 것이다. 집합이 수를 대신한다는 것과 관련된 좀 더 구체적인 논변들은 Maddy(2011), pp.87-88에서 제시한다.

은 S의 어떠한 배열 A_i도 임의의 n 번째에 나타나지 않는 원소가 존재하는 방식으로 밖에 배열되지 않는다는 말이다. 쉽게 말해, S가 열거불가능하다는 말은 그 S를 어떠한 방식으로 배열하든지 그 모든 배열 A_i들에는 임의의 n 번째에 나타나지 않는 원소가 존재하게 된다는 말이다. 이러한 기본적인 사항이 주어졌을 때, 중요하게 고려할 내용은 다음이다.

위의 서술에 의해 S가 열거가능하다는 정의는 그것의 각각의 원소들이 어떤 n번째에 나타나는 방식으로 배열되는 배열 A_n이 존재한다는 것으로 이해할 수 있는데 이것으로부터 우리는 다음의 중요한 사실을 유추할 수 있다. 임의의 n 번째에 나타나지 않는 원소가 존재하는 방식으로 배열된 S의 배열이 무한이 많이 존재할지라도, 열거된 배열 A_n이 존재하기만 하면 그것은 열거가능한 성질을 갖는다. 예를 들어, 유리수나 정수의 경우에 그것은 열거가능한 집합이다. 즉, 그 각각의 원소들이 전부 어떤 n 번째 나타나도록 배열할 수 있다. 그러나 수많은 다른 배열(예를 들어, 표준적인 배열)들은, 우리가 잘 알고 있듯이, 어떠한 n 번째에도 나타나지 않는 원소가 존재하는 방식으로 배열된다. 이러한 배열들은 일종의 원소들의 순서 관계를 나타내는 것으로 그러한 관계는 동일한 대상들에 대해서도 다양한 방식으로 정의되거나 적용될 수 있다. 그래서 그러한 순서 관계가 나타내는 것은 자연스럽게 그 대상들에 적용되는 구조(적 패턴)에 대한 얘기로 전환될 수 있다. 즉, 배열에 대한 얘기를 구조적 패턴에 대한 얘기로 바꿔서 서술할 수 있다. 이것은, 결과적으로, 열거 함수 f_{denu}에 대한 얘기가 집합의 구조적 패턴에 대한 얘기로 재 서술될 수 있다는 것을 나타낸다.

위의 설명에 따라, 집합 S가 열거불가능하다는 말은 S의 모든 배열 A_i들이 임의의 n 번째에(도) 나타나지 않는 원소를 가지는 방식으로 배열된다는 사실을 나타내는 것이고 이것은 그 집합의 모든

배열 A_i들이 그러한 구조적 성질을 공통적으로 가진다는(혹은 예화하고 있다는) 사실을 나타낸다. 이러한 의미에서 위의 정의는 열거불가능한 집합 S에 대한 일종의 구조적 패턴을 나타내주는 것으로 간주할 수 있다. 또는 그것의 모든 배열들이 보편적으로 가지는 패턴이라는 점에서 그 집합의 논리적 패턴으로 간주할 수도 있을 것이다. 이러한 방식으로 <¬denu> 개념에 대한 정의를 (적용과 예화에 의해)구조적 패턴을 나타내는 진술로 해석했을 때 우리는 다음의 사실을 알 수 있다. 열거가능한 무한 집합의 경우에 각 원소들이 어떤 n 번째 나타나도록 배열되는 그러한 배열들을 제외한, 다른 많은 배열들은 <¬denu> 개념의 구조적 패턴을 예화하고 있다는 것이다. 그래서 이와 같은 방식으로 열거가능한 집합도 <¬denu> 개념의 정의(의미)와 관련한 핵심적인 내용인 구조적 패턴을 예화할 수 있다.

그러므로, 우리는 비표준 모형과 관련하여 다음과 같은 의미론적 설명을 제시할 수 있다. M_2에서 '¬denu(PN)' 문장이 참이 된다는 사실은 PN^{M_2}가 <¬denu> 개념의 구조적 패턴을 예화하고 있다(혹은 그것이 적용된다)는 것이고 이것은 M_2에서 PN^{M_2}가 임의의 n 번재에 나타나지 않는 원소가 존재하게 되는 방식으로만 배열되어 있음을 나타낸다.[27] 그래서 PN^{M_2}는 <¬denu> 개념의, 의미와 관련해 핵심적인, 구조적 패턴을 PN^{M_1}과 공유한다고 볼 수 있다. 이

27) 모형 M은 '구조'라고 불리는 것으로 그 자체로 구조적 성질을 나타내는 것이다. 즉, 단지 도메인(D)을 말하는 것이 아니다. 도메인은 한 집합으로 그 자체로는, 구조적 성질을 가질 수도 있지만, 일반적으로 구조적인 내용과 중립적으로 간주된다. 식을 만족시키는 일종의 수열(satisfaction sequence)로 간주되는 할당 함수에 의해 D에 대해 구조적 성질이 예화될 수 있다. 한 예로, 할당 함수 s는 술어(혹은 식) P에 대해서 D의 순서 n 중체들의 집합을 할당한다. 그것은 D의 원소들의 (순서)관계를 나타내는 것으로 M이 P를 만족시키는 경우에 그러한 (순서)구조적 내용이 D에서 예화될 수 있음을 보여주는 것이다.

러한 사실들에 의해 우리는 PN^{M_1}과 PN^{M_2}(또는 $\neg denu(x)^{M_1}$과 $\neg denu(x)^{M_2}$)가 대상적 측면에서는 다를 수 있지만 의미론적으로 차이를 발생시킨다고 볼 필요가 없다. 그러므로 우리는 다음과 같은 결론에 이를 수 있다. 비표준적인 열거불가능성 개념($\neg denu(x)^{M_2}$)이 적용되는 집합 PN^{M_2}은 단순한 가짜이거나 문제가 되는 것이 아니라 PN^{M_1}과 의미론적으로 차이가 없는 모형론적 복제품 혹은 대체품이라고 할 수 있을 것이다.[28] 이러한 점에서 비표준적 개념이나 모형은 1.2의 게티어 상황 같은 문제를 발생시키는 것이 아니라, 이론적 편리성의 측면에서 항상 대체해서 사용할 수 있는 모조품이나 대체품으로 설명할 수 있다.[29] 따라서 우리는 ZF를 하면서 상대성과 관련하여 구분불가의 상황을 진정한 문제로 간주할 필요가 없다는 것을 알 수 있을 것이다.

5. 결론

지금까지의 논의들을 통해서 ZFC에 대한 스콜렘 상대성의 문제와 관련하여 우리는 다음과 같은 결론에 이른다. 먼저, 스콜렘 상대성에 의한 ZFC의 구분불가능성 문제는 그것이 진정한 문제라고 할지라도 2.2에서 살펴봤듯이 ZFC의 보편이론적 특징에 의해서 우리는 ZFC를 가지고서 그러한 문제에 대해서 충분히(거의) 만족스러운 대답을 할 수 있다. 그리고 그 문제는 또 다른 측면(양화사의 맥락의존성)에서 생각해보면 그것은 ZFC가 부담해야할 혹은 책임져야 할 (언어적)문제가 아니라 언어외적인 일종의 자연스러운

28) 이와 유사한 맥락에서 우리가 2.2에서 형식적 한계에 의해 ZFC 대신 주목한 ZFC^{fin} 역시 그것은 메타레벨에서의 ZFC에 대한 형식적 레벨에서의 복제품으로 설명될 수 있을 것이다.

29) 예를 들어 집합론에서의 독립성 증명에서 사용되는 모형들이나 해석학에서 무한소를 포함하는 실수 모형에 대한 비표준 모형이 그것들이다.

상황이라고 말 할 수 있다. 마지막으로, 우리는 상대성에 대해서 좀 더 본질적인 측면에서 고려해볼 수가 있다. 그것은 구조적 내용을 집합으로 나타낼(예화할) 수 있는 집합 개념의 본성에 대한 숙고를 해보는 것이다. 이 경우에 우리는 열거불가능한 집합이 어떤 구조적 패턴을 가지고 있고 그 패턴은 열거가능한 집합에 의해서도 예화될 수 있음을 확인할 수 있다. 이러한 의미에서 비표준 모형이나 비표준적 개념이 단지 문제적 요소가 아니라 표준적 의미와 의미론적으로 별 차이가 없는 효과적인 복제품이나 대체품으로 간주할 수 있다는 결론에 이르게 된다. 따라서 이러한 논변들에 의해, 우리는 ZFC를 하면서 집합 개념의 모형 상대적인 상황을 인정하면서도 그러한 상대성에 의해서 발생할 수 있는 것처럼 보였던 문제들에 대해서 대답을 할 수 있게 되는 것이다.

참고문헌

권병진 (2007), “스콜렘의 상대주의 논증과 베나세라프의 미결정성 논증”, 「철학적 분석」, 16, pp. 99-142

Abian, A. (1965), *The Theory of Sets and Transfinite Arithmetic*, Saunders Mathematics books.

Bellotti, L. (2006), “Skolem, the Skolem 'Paradox' and Informal Mathematics”, *Theoria* 72 (3), pp. 177-212.

Benacerraf, P. (1967), “What numbers could not be”, reprinted in Benacerraf and Putnam (1983), Cambridge Press, pp. 272-294.

Benacerraf, P. and Putnam, H. (1983), *Philosophy of mathematics*, Blackwell.

Benacerraf, P. (1985), “Skolem and the Skeptic”, *Proceedings of the Aristotelian Society*, Vol. 59, pp. 85-115.

Boolos, G. (1971), “The Iterative Conception of Set” in Benacerraf and Putnam (1983), Cambridge Press, pp. 486-502.

Bostock, D. (2009), *Philosophy of Mathematics: An Introduction,* Wiley-Blackwell.

Cohen, P. (1966), *Set Theory and the Continuum Hypothesis,* New York, NY: W.A. Benjamin.

Devlin, K. (1994) *Joy of sets*, (2nd ed.), Springer.

Drake, F. (1996), *Intermediate set theory*, John wiley & sons.

Franzen, T. (2004), *Inexhaustibility: A Non-Exhaustive Treatment*, Association for Symbolic Logic.

Frege, G. (1980), *The Foundations of Arithmetic: A Logico-Mathematical Enquiry Into the Concept of Number*, Northwestern University Press., Gödel, K. (1947/64), “What is Cantor's continuum problem?”, Benacerraf and Putnam (1983), Cambridge Press, pp. 470-485.

Hallet, M. (1984), *Cantorian Set Theory and Limitation of Size*, Clarendon Press.

Hallet, M. (1994), “Putnam and the Skolem Paradox”, In M. Baghramian (ed.), *Reading Putnam*, Blackwell.

Hallet, M. (2011), “Absoluteness and the Skolem Paradox”, In *Logic, Mathematics, Philosophy*, Vintage Enthusiasms. Springer.

Jane, I. (2001), “Reflections on Skolem's Relativity of Set-Theoretical Concepts”, *Philosophia Mathematica* 9 (2), pp. 129-153.

Jech, T. (2000), *Set theory*, Springer.

Klein, P.D. (1976), “Knowledge, Causality and Defeasibility”, *Journal of Philosophy*. 73, pp. 797-8.

Klenk, V. (1976), “Intended Models and the Löwenheim-Skolem Theorem”, *Journal of Philosophical Logic*, 5, pp. 475-89.

Kunen, K. (1980), “Set Theory: An Introduction to Independence Proofs”, *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, Vol. 102. North-Holland Publishing Company, Amsterdam.

Maddy, P. (1988), “Believing the Axioms I”, *Jouranl of Symbolic Logic*, 53, pp. 481-511.

Maddy, P. (2011), “Set Theory as a Foundation In Foundational Theories of Classical and Constructive Mathematics”, *The Western Ontario Series in Philosophy of Science*, Springer.

McIntosh, C. (1979), “Skolem's Criticisms of Set Theory”, Noûs 13 (3), pp. 313-334.

Cook, R. (2009), *A Dictionary of Philosophical Logic*, Edinburgh University Press

Peters, S and Westerstahl, D. (2006), “Quantifiers in Language and Logic”, Oxford University Press

Shapiro, S. (1991), *Foundation without Foundationalism: A Case for Second-Order Logic*, Oxford University Press.

Shapiro, S. (1997), *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*, Oxford University Press.

Skolem, T. (1922), “Some remarks in axiomatized set theory”, in Van Heijenoort, J.(ed.), (1967), *From Frege to Gödel*, Harvard Press.

Tennant, N and McCarty, C. (1987), “Skoelm's Paradox and Constructivism”, *Journal of Philosophical Logic* 16, pp. 166-202.

Wang, H. (1974), “The Concept of Set” in Benacerraf and Putnam (1983), Cambridge Press, pp. 530-570.

고려대학교 철학과
Department of Philosohpy, Korea University
xtasea@naver.com

ZFC and Non-Denumerability

Yohan An

If 1st order ZFC is consistent(has a model(M_1)) it has a transitive denumerable model(M_2). This leads to a paradoxical situation called 'Skolem paradox'. This can be easily resolved by Skolem's typical resolution. but In the process, we must accept the model theoretic relativity for the concept of set. This relativity can generate a situation where the meaning of the set concept, for example, <x is not denumerable> is given differently depending on the two models. The problem is next. because the sentence '¬denu(PN)' which indicate that PN is not denumerable is equally true in two models, A indistinguishability problem that the concept <¬denu> is not formally indistinguishable in ZFC arise. First, I will give a detail analysis of what the nature of this problem is. And I will provide three ways of responding to this problem from the standpoint of supporting ZFC. First, I will argue that <¬denu> concept, which can be relative to the different models, can be 'almost' distinguished in ZFC by using the formalization of model theory in ZFC. Second, I will show that <¬denu> can change its meaning intrinsically or naturally, by its contextual dependency from the semantic considerations about quantifier that plays a key role in the relativity of <¬denu>. Thus, I will show the model-relative meaning change of <¬denu>

concept is a natural phenomenon external to the language, not a matter of responsible for ZFC.

Key Words: Skolem relativity, ZFC, Non-denumerability, indeterminancy, Indistinguishability, Structure